书名没想好 (习题册版)

副标题可能没有

孙沄澔　也许还有其他人

出版社暂无

出版年份待定

前言

这本书简单来说是一本习题册, 从 2024 年 6 月开始, 我将每天所做练习中有趣的部分摘录, 分门别类, 并配上自己的解答. 题目主要来自高中数学联赛一试真题, 各省份预赛真题, 上海一二模真题与各高中名校试卷. 因为本书最初的目的是出于个人题目收集, 很多题目答案的编写并不完整, 可能只是有主要思路的梗概, 当然, 也可以理解为我将这些问题" 留作习题", 这在大学数学书中时常发生.

数学不是一个个独立的知识或题目, 而是一个有机的整体, 每个部分相互关联, 本书着重选择不同知识点产生化学反应的题目, 如向量问题转化为代数问题, 代数问题再转化为复数问题等等, 这样的问题自然十分困难, 但也正是这些问题能锻炼人的思维, 帮助学生更深刻地理解数学.

单纯的习题册当然可以出书, 这也是现在教辅的主流, 但数学题目与数学终归是不同的, 数学更多体现在思想与审美. 本书的习题选择也是本人数学审美的一种体验, 习题并不是越难越好, 有一些非常简单的题目也入选了本书, 因为其十分契合数学之思想 (如连续性的相关问题), 出题不是为了难为学生, 而是为了帮助学生理解数学, 这也是本书如此筛选题目的目的, 教师的任务是帮助学生.

如上文所言, 教师应帮助学生理解数学, 这才是教育, 而这也是我这本大杂烩习题册完成不了的任务, 真正关注数学思想教育的书籍可以参看我另一本讲义, 我在其中打破常规, 学习法国数学模式, 将一个大问题拆解成十数小问, 一步一步带领学生征服困难问题. 本书作为习题册, 一部分任务也是为我的讲义提供题目素材, 巧妇难为无米之炊, 我在另一本讲义中的饭都来自这本书中的米. 当然, 本书也并不是没有教学生的考量, 我在许多题目身边都有教学上建议的注记, 选题的目的等等, 这也可以为教育者提供一定建议.

本书对竞赛的组合与概率题目的解答颇具新意, 很多题目提供了多种解法, 我也在这过程

中发现自己对组合的能力较强, 可以更深层地发展. 此外, 本书对函数连续性问题也有更深入的讨论, 还介绍了马尔科夫链的相关问题, 对于其他有大学数学背景的问题我也做了标注, 非常期待学生们可以自主学习相关知识后与我交流, 教学相长.

我总是提到希望做一些数学教育上的创新, 但就像程序员届经常说的一句话

Talk is cheap, show me your code.

光说不练假把式, 只有实地的作品才能让人相信我对教育的认真与决心. 也非常希望各位老师或同学可以关注我的另一本讲义, 其可读性更强, 更成体系, 也更能表现我的精神与风格.

感谢中国科学院数学与系统科学院陈国瑞博士的帮助, 我与陈国瑞在 2024 年 6 月至 2024 年 7 月一起完成了 09 年至 23 年高中数学联赛一试试卷与许多各省份预赛试卷, 从中获益良多, 我们还讨论了本书中的其他题目, 本书的完成离不开他的帮助.

习题众多, 错误在所难免, 我的邮箱为 sunyunbiao@amss.ac.cn, 若有任何疑问, 可以邮件联系我, 感谢各位的指正!

孙沄滮

2024 年 10 月 20 日于家中

目录

1 集合

1.1 填空题

1. (11 一试) 设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$. 若 A 中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B=\{-1,3,5,8\}$, 则集合 $A=$______.

证明. 考虑 $3(a_1+\cdots+a_4)=-1+3+5+8$ 更为便捷. □

2. (23 奉贤二模) 在集合 $\{1,2,3,4\}$ 中任取一个偶数 a 和一个奇数 b 构成一个以原点为起点的向量 $\overrightarrow{\alpha}=(a,b)$, 从所有得到的以原点为起点的向量中任取两个向量为邻边作平行四边形, 面积不超过 4 的平行四边形的个数是______.

证明. 枚举. □

3. (14 一试) 对于实数集 $\mathbb{R}$ 的任意子集 U, 我们在 $\mathbb{R}$ 上定义函数

$$f_U(x)=\begin{cases}1, & x\in U\\ 0, & x\notin U\end{cases}.$$

如果 A,B 是 $\mathbb{R}$ 的两个子集, 则 $f_A(x)+f_B(x)\equiv 1$ 的充分必要条件是 ______.

证明. 显然. □

4. (20A 一试) 设集合 $A=\{1,2,m\}$, 其中 m 为实数. 令 $B=\{a^2\mid a\in A\}, C=A\cup B$. 若 C 的所有元素之和为 6 , 则 C 的所有元素之积为______.

证明. $C=\{1,2,4,m,m^2\}$, 如果 $m^2\neq 1,2,4,m$, 有 $m+m^2=1$, 无实数解; 如果 $m^2=1,2,m$, 分别带入, 得到 $m=-1$. □

5. (24 嘉定二模) 12. 若规定集合 $E=\{0,1,2,\cdots,n\}$ 的子集 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 为 E 的第 k 个子集. 其中 $k=2^{a_1}+2^{a_2}+2^{a_3}+\cdots+2^{a_m}$, 则 E 的第 211 个子集是______.

证明. 实际是对 211 做 2− 进制分解, $211 = 128 + 64 + 16 + 2 + 1 \Rightarrow \{0, 1, 4, 6, 7\}$. □

1.2 解答题

1. (24 学军中学压轴) 对于一个四元整数集 $A = \{a, b, c, d\}$, 如果它能划分成两个不相交的二元子集 $\{a, b\}$ 和 $\{c, d\}$, 满足 $ab - cd = 1$, 则称这个四元整数集为" 有趣的".

(1) 写出集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 的一个" 有趣的" 四元子集:

(2) 证明: 集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 不能划分成两个不相交的" 有趣的" 四元子集:

(3) 证明: 对任意正整数 $n(n \geq 2)$, 集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 4n\}$ 不能划分成 n 个两两不相交的" 有趣的" 四元子集.

证明. (1) $\{1, 5, 2, 3\}$;

(2) 首先 1 一定在某个集合, 那就考虑 $1 \times n$, $n \geq 2$, 哪些可能使得 $n - uv = \pm 1$, 得到可能为 $\{1, 5, 2, 3\} \cup \{4, 6, 7, 8\}$ 或 $\{1, 7, 2, 4\} \cup \{3, 5, 6, 8\}$ 两种情况, 但都不成立.

(3)(奇偶性与放缩) $ad - bc = 1$ 所以一奇一偶, 所以 $\{a, b, c, d\}$ 中至少有两个奇数. 反证: 如果有划分 $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ 成立, 不妨设 a_i, b_i 为奇数, 因此 $2n$ 个奇数都用完了, c_i, d_i 都是偶数, 根据" 有趣" 的定义, 有 $|a_ib_i - c_id_i| = 1$(绝对值因为顺序可能要换). 现在我们要找矛盾, 不妨思考一个简单的情况: 如果条件是 $a_ib_i = c_id_i$, 问题是否已经解决了呢? $\prod a_ib_i = \prod c_id_i$ 显然是不成立的, 可以从奇偶性看, 也可以从大小看.

回到 $|a_ib_i - c_id_i| = 1$,

$$a_ib_i \leq c_id_i + 1 < (c_i + 1)(d_i + 1)$$

然而

$$\prod a_ib_i = \prod (c_i + 1)(d_i + 1)$$

给出了矛盾. □

1.3 证明题

1. (21 浙江预赛) 设数集 $P=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$, 它的平均数

$$C_P=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}.$$

现将 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 分成两个非空且不相交子集 A,B, 求 $|C_A-C_B|$ 的最大值, 并讨论取到最大值时不同的有序数对 (A,B) 的数目.

证明. 题目不难, 重点是教学生写严格的证明 □

2 函数

2.1 填空题

1. (22 静安二模) 已知函数 $f(x)=\frac{a^x}{2^x+1}(a>0)$ 为偶函数, 则函数 $f(x)$ 的值域为______.

证明. $f(1)=f(-1)$, $\frac{a}{3}=\frac{2}{3a}$, $a=\sqrt{2}$, $f(x)=\frac{2^{\frac{x}{2}}}{2^x+1}=\frac{1}{2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}}\le\frac{1}{2}$, 所以值域为 $(0,\frac{1}{2}]$. □

2. (22 静安二模) 已知 $\triangle ABC$ 中,$\sin A=3\sin C\cos B$, 且 $AB=2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 ______.

证明. $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$, $\frac{a}{3\sin C\cos B}=\frac{2}{\sin C}$, $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$, 所以 $\sin B\cos C=2\sin C\cos B$, $\sin B=\frac{2\sin C\cos B}{\cos C}$, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=6\cos B\frac{2\sin C\cos B}{\cos C}$. □

3. ($\star$22 静安二模) 若 $10^x-10^y=10$, 其中 $x,y\in\mathbb{R}$, 则 $2x-y$ 的最小值是______.

4. (22 长宁一模) 设 $x,y\in\mathbf{R},a>0,b>0$, 若 $a^x=b^y=3,a+2b=2\sqrt{6}$, 则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最大值为______.

证明. $x=\log_a^3$, 验证 $\frac{1}{x}=\log_3^a$, 同理有 $\frac{1}{y}=\log_3^b$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_3^{ab}$, $a+2b=2\sqrt{6}$, $\sqrt{2ab}\le\sqrt{6}$, $ab\le 9$, $(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})_{max}=2$. □

5. ($\star$22 长宁一模) 设曲线 C 与函数 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{12}x^2(0\leqslant x\leqslant m)$ 的图像关于直线 $y=\sqrt{3}x$ 对称, 若曲线 C 仍为某函数的图像, 则实数 m 的取值范围为______.

6. (24 甘肃预赛) 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 且 $h(x)=f(x)+e^{-x}-x$ 为奇函数, 则满足 $f(2a-1)-f(\sqrt{a})<0$ 的 a 的取值范围是 ______..

证明. 先确定 $f(x)$: $h(x)+h(-x)=f(x)+f(-x)+e^{-x}+e^x=0$, 由 $f(x)$ 为偶函数, 得 $f(x)=-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$. 由基本不等式知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减, 故 $f(2a-1)-f(\sqrt{a})<0\iff|2a-1|>\sqrt{a}$ □

7. (09 一试) 若函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 且 $f^{(n)}(x)=\underbrace{f(f(f\cdots f(x)))}_{n\text{ 个}}$, 则 $f^{(99)}(1)=$______.

证明. 观察归纳: $f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $f^{(2)}(1)=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, 猜 $f^{(n)}(1)=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, 可归纳严格证明. □

8. (11 一试) 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ 的值域为______.

证明. (a) (法一) 求导发现单调递减, 计算极值 (注意 1 的两侧).

(b) (法二) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}=\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+2(x-1)+2}}{x-1}=\sqrt{1}$

□

9. (12 一试) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且当 $x\geq 0$ 时, $f(x)=x^2$. 若对任意的 $x\in[a,a+2]$, 不等式 $f(x+a)\geq 2f(x)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为______.

证明. 实际是分段函数, $f(x)=-x^2,x<0$. 分类:

(a) $a \geq 0$. $(x+a)^2 \geq 2x^2 \iff (x-a)^2 \leq 2a^2$, 得 $a \geq \sqrt{2}$.

(b) $a < 0$. 注意到 $a+2 \leq 0$, 否则不可能有 $f(a+2+a) \leq 2f(x+a)$, 故 $a \leq -2$. $-(x+a)^2 \geq -2x^2 \iff (x-a)^2 \geq 2a^2$, $a \geq -\sqrt{2}$, 与 $a < -2$ 矛盾.

□

10. (14 一试) 设 $g(x) = \sqrt{x(1-x)}$ 是定义在区间 $[0,1]$ 上的函数, 则函数 $y = xg(x)$ 的图象与 x 轴所围成图形的面积为______.

证明. (a) (法一): 换元后积分, $x = \sin^2\alpha$, 有 $dx = 2\sin\alpha\cos\alpha d\alpha$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 y dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha d\alpha \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha\cdot(\sin^2\alpha\cos^2\alpha)d\alpha \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\sin^2\alpha\cos^2\alpha d\alpha \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha d\alpha \\
&= \frac{\pi}{16}
\end{aligned}$$

(b) (法二) 注意到 $g(x) = g(1-x)$, 考虑LEFT

□

11. (13 一试) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin A = 10\sin B\sin C, \cos A = 10\cos B\cos C$, 则 $\tan A$ 的值为______.

证明. 优雅: $\cos A - \sin A = -10\cos A$, 显然. □

12. (13 一试) 设 a, b 为实数, 函数 $f(x) = ax + b$ 满足: 对任意 $x \in [0,1]$, 有 $|f(x)| \leq 1$. 则 ab 的最大值为______.

证明. 显然可以取到 a, b 一正一负, 或两正, 因为求最大值, 故考虑 a, b 同号即可, $0 \le b \le 1, 1 \ge a+b \ge 2\sqrt{ab}$, 故 $ab \le \frac{1}{4}$, 等号成立当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$. □

13. (13 一试) 若实数 x, y 满足 $x - 4\sqrt{y} = 2\sqrt{x-y}$, 则 x 的取值范围为______.

证明. (a) (法一) 柯西不等式: $x = 4\sqrt{y} + 2\sqrt{x-y} \le \sqrt{(4^2+2^2)x} = \sqrt{20x}$, 故 $x \le 20$, 等号成立当且仅当 $\frac{\sqrt{y}}{2} = \frac{\sqrt{x-y}}{4} \Longleftrightarrow x = 5y$. 最左侧等号成立当且仅当 $x = 0$ 或 $y = 0$, 故 $x = 0$ 或 $x \ge 4$, 得 $x \in \{0\} \cup [4, 20]$, 但不知道如何证明可取 4 到 20 间所有数.

(b) (法二) 换元: 平方和消元除了柯西不等式外可以考虑换元 令 $m = \sqrt{y}, n = \sqrt{x-y}$, $m, n \ge 0$. $m^2 + n^2 - 4m = 2n \Longleftrightarrow (m-2)^2 + (n-1)^2 = 5$, 观察图形, 注意原点也在圆上即可.

□

14. (18A 一试) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的以 2 为周期的偶函数, 在区间 $[0,1]$ 上严格递减, 且满足 $f(\pi) = 1, f(2\pi) = 2$. 则不等式组 $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 1 \le f(x) \le 2 \end{cases}$ 的解集为______.

证明. 简单题: $[\pi - 2, 8 - 2\pi]$. □

15. (19A 一试) 已知正实数 a 满足 $a^a = (9a)^{8a}$, 则 $\log_a(3a)$ 的值为______.

证明. $a = \log_a a^a = 8a\log_a(9a)$, 由 $a \ne 0$ 得 $2\log_a 3 + 1 = \frac{1}{8}$, $\log_a 3 = -\frac{7}{16}$, 故 $\log_a(3a) = \frac{9}{16}$. □

16. (19A 一试) 平面直角坐标系中, $\overrightarrow{e}$ 是单位向量, 向量 $\overrightarrow{a}$ 满足 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e} = 2$, 且 $|\overrightarrow{a}|^2 \le 5|\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{e}|$ 对任意实数 t 成立, 则 $|\overrightarrow{a}|$ 的取值范围为______.

证明. $\overrightarrow{e}=(1,0)$, $\overrightarrow{a}=(2,m)$. 对任意 t 有

$$m^2+4\le 5\sqrt{(2+t)^2+m^2}$$

$$(m^2+4)^2\le 25(t^2+4t+(m^2+4))$$

即二次函数 $25t^2+100t+25(m^2+4)-(m^2+4)^2\ge 0$ 对任意 t, 故 $\Delta<0$:

$$10000-4\cdot 25(25(m^2+4)-(m^2+4)^2)<0$$

这实际上是 m^2+4 的二次函数, 令 $m^2+4=n$, 有 $n^2-25n+100<0$, $(n-5)(n-20)<0$ 得 $m^2+4\in(5,20)$, 这实际也是 $|\overrightarrow{a}|^2$. □

17. (22 四川) 已知实数 x,y 满足 $x|x|+\frac{y|y|}{3}=1$, 则 $|\sqrt{3}x+y-4|$ 的取值范围是_____.

证明. LEFT □

18. (24 复附) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-(x-1)^2}, & 0\le x<2\\ f(x-2), & x\ge 2\end{cases}$, 若对于正数 $k_n\,(n\in N^*)$, 直线 $y=k_n\cdot x$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象恰有 $2n+1$ 个不同交点, 则 $k_1^2+k_2^2+\cdots+k_{2022}^2=$_____.

证明. 注意到 f 是上半圆, 利用相切等价于圆心到直线距离为半径. □

19. (24 建平高三月考 1) 已知函数 $y=f(x), y=g(x), y=h(x)$ 依次是定义在 $\mathbb{R}$ 上的严格增函数、严格减函数以及周期函数, 记 $K(x)=\max\{f(x),g(x),h(x)\}$, 其中 $\max\{a,b,c\}$ 表示 a,b,c 三数中的最大者. 考虑如下三个命题: (1) 若 $y=K(x)$ 是严格增函数, 则 $K(x)=f(x)$; (2) 若 $y=K(x)$ 是严格减函数, 则 $K(x)=g(x)$; (3) 若 $y=K(x)$ 是周期函数, 则 $K(x)=h(x)$, 其中真命题的个数是_____.

证明. 注意定义域为 $\mathbb{R}$, 所以 (1), (2) 均正确; (3) 正确. 我们改变一下定义域 □

注记 2.1. 如果定义域为 $[m,n]$, 那么 (1), (2) 都是错的. 两者区别在于定义域长度有限, 周期不能无限运行下去.

来看一下一切的源泉, 17 高考压轴题

20. (17 上海高考) 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 单调递增且恒大于零. $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上恒大于零的周期函数, M 是 $g(x)$ 的最大值. 函数 $h(x)=f(x)g(x)$. 证明: " $h(x)$ 是周期函数" 的充要条件是" $f(x)$ 是常值函数" .

证明. $\Leftarrow$: 显然;

$\Rightarrow$: 设 $g(x)$ 的周期为 T_1, $h(x)$ 的周期为 T_2. 不妨设 $g(0)=M$, 有

$$h(T_2)=f(T_2)g(T_2)\geq f(0)g(0)\Rightarrow f(0)=f(T_2),g(0)=g(T_2) \quad \text{由 } f(x) \text{ 单调性.}$$

首先由 $g(0)=g(T_2)$ 知 $g(nT_2)=M, \forall n\in\mathbb{Z}$; 由 $f(x)$ 单调递增知 $f(x)$ 在 $[0,T_2]$ 上为定值, 同理, $f(x)$ 在 $[uT_2,(u+1)T_2]$ 上也为定值, $\forall u\in\mathbb{Z}$, 由 u 的任意性, 可拓展到 $\mathbb{R}$, 故 $f(x)$ 为常值函数. □

注记 2.2. 因为定义域为 $\mathbb{R}$, 所以一切都可以无限运行下去, 而想了解函数在无限长度定义域的情况, 可以将定义域进行分解, 如 $\mathbb{R}=\cup_{n\in\mathbb{Z}}[nT,(n+1)T]$, 每个小区间是有限的, 这更容易把握.

2.2 二次函数

最值问题

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的最值一般分为三种情况讨论, 即 (i) 对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 在区间左边, 函数在此区间上具有单调性; (ii) 对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 在区间之内; (iii) 对称轴在区间右边. 要注意系数 a 的符号对抛物线开口的影响. 点到 $x=-\frac{b}{2a}$ 的距离

(1) 讨论二次函数的区间最值问题: (1) 注意对称轴与区间的相对位置; (2) 注意区间端点的函数值.

(2) 讨论二次函数区间根的分布情况一般需从三方面考虑: (1) 判别式; (2) 区间端点的函数值的符号; (3) 对称轴与区间的相对位置.

根的分布问题

一般地, 对于含有字母的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根的分布问题, 用图象求解, 有如下结论. 令 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$,

(1) [一侧两根] $x_1<\alpha, x_2<\alpha$, 则 $\begin{cases}\Delta \geqslant 0, \\ -\frac{b}{2a}<\alpha \\ f(\alpha)>0.\end{cases}$

(2) [一侧两根] $x_1>\alpha, x_2>\alpha$, 则 $\begin{cases}\Delta \geqslant 0, \\ -\frac{b}{2a}>\alpha, \\ f(\alpha)>0.\end{cases}$

(3) [区间内两根] $\alpha<x_1<\beta, \alpha<x_2<\beta$, 则 $\begin{cases}\Delta \geqslant 0, \\ f(\alpha)>0, \\ f(\beta)>0, \\ \alpha<-\frac{b}{2a}<\beta.\end{cases}$

(4) [区间外两根] $x_1<\alpha, x_2>\beta(\alpha<\beta)$, 则 $\begin{cases}\Delta \geqslant 0, \\ f(\alpha)<0, \\ f(\beta)<0.\end{cases}$

(5) [区间内一根] 若 $f(x)=0$ 在区间 (α, β) 内只有一个实数根, 则有 $f(\alpha) f(\beta)<0$.

1. (21 上海预赛有些意思) 一个骰子连续投两次, 得到的点数依次为 a 和 b, 则使得关于 x 的三次方程 $x^3-(3a+1)x^2+(3a+2b)x-2b=0$ 有三个互不相等的实数根的数对 (a, b) 的个数是______.(学概率后可问概率 $P=$______.)

证明. 注意到 $x=1$ 是一个根, 于是将原式除以 $(x+1)$ 化为二次函数: $x^3-3ax+2b$, 有两个互异根且不等于 1, 这等价于 $\Delta=9a^2-8b>0$, 且 $1-3a+2b\neq 0$. 满足条件的情况为

$$\begin{aligned} a&=2 & b&=1,2,3,4\\ a&=3 & b&=1,2,3,5,6\\ a&=4 & b&=1,2,3,4,5,6\\ a&=5 & b&=1,2,3,4,5,6\\ a&=6 & b&=1,2,3,4,5,6 \end{aligned}$$

故一共 27 个, 概率为 $\frac{3}{4}$. □

2.3 解答题

1. (09 一试) 若方程 $\lg kx=2\lg(x+1)$ 仅有一个实根, 则实数 k 的取值范围为______.

证明. 分类讨论: $k>0$, 只在第一象限相交, 计算 $\Delta=0$; $k<0$, 即在 $(-1,0)$ 有唯一交点, 注意到对称轴在 $x=-1$ 左侧, 所以这等价于 $f(-1)<0$, 其中 $f(x)=(x+1)^2-kx$. □

2. (李胜宏) 设函数 $f(x)=x^2-(k^2-5ak+3)x+7(a,k\in\mathbf{R})$. 已知对于任意的 $k\in[0,2]$, 若 x_1,x_2 满足 $x_1\in[k,k+a],x_2\in[k+2a,k+4a]$, 则 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$, 求正实数 a 的最大值.

证明. 由于二次函数 $f(x)=x^2-(k^2-5ak+3)x+7$ 图象的对称轴方程为 $x=\frac{k^2-5ak+3}{2}$, 故题设条件等价于对任意的 $k\in[0,2]$ 均有 $\frac{k^2-5ak+3}{2}\geqslant k+\frac{5}{2}a$, (分析对称轴的不同位置)

即对任意的 $k\in[0,2]$ 均有 $5a\leqslant\frac{k^2-2k+3}{k+1}, 5a\leqslant\min\limits_{0\leq k\leq 2}\left\{\dfrac{k^2-2k+3}{k+1}\right\}$.

又 $\frac{k^2-2k+3}{k+1}=(k+1)+\frac{6}{k+1}-4\geqslant 2\sqrt{(k+1)\times\frac{6}{k+1}}-4=2\sqrt{6}-4$, 当且仅当$k=\sqrt{6}-1$ 时取等号, 故 $\min\limits_{0\leqslant k\leqslant 2}\left\{\dfrac{k^2-2k+3}{k+1}\right\}=2\sqrt{6}-4$. 所以, 正实数 a 的最大值为 $\frac{2\sqrt{6}-4}{5}$. □

3. (李胜宏) 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a>b>c), f(1)=0, g(x)=ax+b$.

证明: 函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象有两个交点.

证明. $a+b+c=0, 3a>a+b+c>3c, a>0, c<0$. $g(x)$ 带入 $f(x)$, 得 $ax^2+(b-a)x+(c-b)=0$, $\Delta=(b-a)^2-4a(c-b)=(b+a)^2-4ac>0$, 因为 $(b+a)^2>(c+a)^2>4ac$. □

4. (李胜宏) $f(x)$ 是定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的函数, 满足

(i) $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y), \forall x>0$

(ii)$f(x)>0, \forall x\in(1,2)$.

考虑下列问题:

(1) 求 $f(1)$ 的值.

(2) 证明 $f(x)$ 严格单调递增.

(3) 若 $f(6)=1$, 解不等式 $f(x-3)-f(\frac{1}{x})<2$.

证明. (1) 显然.

(2) 任取 $0<x_1<x_2$, $x_2=x_1+n\cdot cx_1$, 其中 $n\in\mathbb{N}, 0<c<1$, 考虑 $f(x_1+c)=f(x_1)=f(\frac{x_1+cx_1}{x_1})=f(1+c)>0$, 递推得到 $f(x_2)-f(x_1)>0$.

(3) 得 $f(36)=2$, 实际上 $2=f(\frac{36x}{x})=f(36x)-f(x)$, 由单调性, 得 $f(x-3)-f(\frac{1}{x})<2 \Longleftrightarrow x-3<36(\frac{1}{x})$. □

5. (李胜宏) 已知 $a,b\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=a\left(x^2-1\right)+bx, x\in[-1,1]$.

(1) 如果 $f(x)$ 的最大值为 c, 最小值为 d, 且 $|d|\neq|c|$, 证明: $a\neq 0$, 且 $\left|\frac{b}{a}\right|<2$.

(2) 如果 $f(x)$ 的最大值为 2 , 最小值为 $-\frac{5}{2}$, 求 a,b.

证明. (1) $a=0$ 显然有 $|d|=|c|$. $a\neq 0$, 对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$, 若 $-\frac{b}{a}\notin[-1,1]$, 那么最大值, 最小值 $\in\{b,-b\}$, 有相同的绝对值, 所以 $-\frac{b}{a}\in[-1,1]$. 带入得最大/小值为 $a(\frac{b^2}{4a^2}-1)-\frac{b^2}{2a}$ □

6. (李胜宏) 线段 AB 的两个端点分别为 $A(3,0),B(0,3)$, 若抛物线 $y=x^2-2ax+a^2+1$ 与线段 AB 有两个交点.

7. (李胜宏) 已知 $f(x)=(m-2)x^2-4mx+2m-6$ 的图象与 x 轴的负半轴有交点, 求实数 m 的取值范围.

8. (21 浙江预赛) 已知二次函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbb{R})$ 有两个不同的零点. 若 $f\left(x^2+2x-1\right)=0$ 有四个不同的根 $x_1<x_2<x_3<x_4$, 且 x_1,x_2,x_3,x_4 成等差数列, 求 $a-b$ 的取值范围.

证明. 设 $f(x)$ 两个零点为 d_1,d_2, 于是有 $d_1+d_2=-a,d_1d_2=b,a-b=-(d_1+d_2+d_1d_2)$. 考虑 $x^2+2x-1=d_1$, 两根为 $-1\pm\sqrt{2+d_1}$, 同样的,$x^2+2x-1=d_2$, 两根为 $-1\pm\sqrt{2+d_2}$, $d_i>-2$. 不妨设 $d_1>d_2$, 于是有 $-1+\sqrt{2+d_2}-(-1-\sqrt{2+d_2})=-1+\sqrt{2+d_1}-(-1+\sqrt{2+d_2})$. 给出 d_1 与 d_2 关系式, 将 $a-b$ 化为二次函数, 得到取值范围. □

9. (24 甘肃预赛)(1) 拐点, 又称反曲点, 指改变曲线向上或向下的点 (直观地说拐点是使切线穿越曲线的点, 即连续曲线的凹弧与凸弧的分界点). 设 $f'(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的导函数, $f''(x)$ 是函数 $f'(x)$ 的导函数. 若方程 $f''(x)=0$ 有实数解 $x=x_0$, 并且在点 $(x_0,f(x_0))$ 左右两侧二阶导数符号相反, 则称 $(x_0,f(x_0))$ 为函数 $y=f(x)$ 的拐点.

(2) 设 a,b 为常数, 若定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 对于定义域内的一切实数 x, 都有 $f(a+x)+f(a-x)=2b$ (或 $f(x)=2b-f(2a-x)$) 恒成立, 则函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 (a,b) 对称.

(1) 求证: 任意的三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ 的图像关于拐点对称;

(2) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}$, 求 $f\left(\frac{1}{2024}\right)+f\left(\frac{2}{2024}\right)+\cdots+f\left(\frac{2023}{2024}\right)$ 的值.

证明. 无聊题, 第一问死算, 第二问从 $\frac{1}{2}$ 处开始对称即可. □

10. (11 一试) 设函数 $f(x)=|\lg(x+1)|$, 实数 $a,b(a<b)$ 满足 $f(a)=f\left(-\frac{b+1}{b+2}\right)$, $f(10a+6b+21)=4\lg 2$. 求 a,b 的值.

证明. 无聊计算题. $\square$

11. (12 一试) 已知函数 $f(x)=a\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x+a-\frac{3}{a}+\frac{1}{2}$, 其中 $a\in\mathbb{R}$, 且 $a\neq 0$.

(1) 若对任意 $x\in\mathbb{R}$, 都有 $f(x)\leq 0$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $a\geq 2$, 且存在 $x\in\mathbb{R}$, 使 $f(x)\leq 0$, 求 a 的取值范围.

证明. 化为 $\sin x$ 的函数, 直接计算 $f(\pm 1)\leq 1$ 即可. $\square$

12. (18A 一试) 设定义在 $\mathbb{R}^{+}$ 上的函数 $f(x)$ 为

$$f(x)=\begin{cases}|\log_3 x-1|, & 0<x\leq 9,\\ 4-\sqrt{x}, & x>9.\end{cases}$$

设 a,b,c 是三个互不相同的实数, 满足 $f(a)=f(b)=f(c)$, 求 abc 的取值范围.

证明. 画图, 注意到 $y\in(0,1)$, 得到 $1-\log_3 a=\log_3 b-1=4-\sqrt{c}$, 由第一个等式得 $\log_3 ab=2$, $ab=9$, 故考虑 c 的取值范围即可, $c\in(9,16)\Rightarrow abc\in(81,144)$. $\square$

13. (21A 一试) 在平面直角坐标系中, 函数 $y=\frac{x+1}{|x|+1}$ 的图像上有三个不同的点位于直线 l 上, 且这三点的横坐标之和为 0 . 求 l 的斜率的取值范围.

证明. $l\colon y=kx+b$, $l\cap y=1\Rightarrow x=\frac{1-b}{k}$; $l\cap y=\frac{x+1}{-x+1}\Rightarrow f(x)=kx^2+(b-k+1)x+(1-b)=0$, $x_1+x_2+x_3=-\frac{b-k+1}{k}+\frac{1-b}{k}=0\iff k+2b=0\iff l\colon y=b(-2x+1)$, 再加上 $\Delta>0$, $f(-\frac{1}{2})>0, -\frac{b}{2a}<-\frac{1}{2}$(注意到 $k>0$). $\square$

14. (24 复附) 定义域相同的函数 $y=f(x), y=g(x)$, 若存在实数 m,n 使 $h(x)=mf(x)+ng(x)$, 则称函数 $y=h(x)$ 是由" 基函数 $y=f(x), y=g(x)$ " 生成的.

(1) 若 $y=x^2+3x$ 和 $y=3x+4$ 生成一个偶函数 $y=h(x)$, 求 $h(2)$ 的值;

(2) 已知实数 ab 满足 $ab \neq 0, y = 2x^2 + 3x - 1$ 由函数 $y = x^2 + ax$ 和 $y = x + b$ 生成, 求 $2a + b$ 的取值范围;

(3) 试利用" 基函数 $y = \log_4(4^x + 1)$ 和 $y = x - 1$ " 生成一个函数 $y = h(x)$, 使之满足下列条件: (1) 该函数是偶函数; (2) 该函数有最小值 1. 求函数 $y = h(x)$ 的解析式并直接研究该函数的单调性 (无需证明).

证明. 只证 (3), 注意到极限情况 $\log_4(4^x+1) \sim \begin{cases} x, & x \to +\infty \\ 0, & x \to -\infty \end{cases}$, 偶函数 $a\log_4(4^x+1)+b(x-1) = a\log_4(4^{-x}+1)+b(-x-1)$, 考虑 $x \to +\infty$, 于是有 $(a+b)x - b = -bx - b$, 故 $a = -2b$, 不妨 $b = 1, a = -2$, 带入后由 Casio 发现先增后减, 最大值为 -2 在 0 处取得, 故乘 $-\frac{1}{2}$, 得最小值为 1, $(-\infty, 0)$ 单减, $(0, +\infty)$ 单增. □

3 题型

3.1 基本不等式 $x + \frac{1}{x}$

1. (14 一试) 设集合 $\left\{\frac{3}{a} + b \middle| 1 \leq a \leq b \leq 2\right\}$ 中的最大元素与最小元素分别为 M, m, 则 $M - m$ 的值为 ____.

证明. 两个变量, 先固定变量 a, 让变量 b 改变, 观察趋势: $\frac{3}{a} + b \geq \frac{3}{a} + a \geq 2\sqrt{3}$, 等号成立当且仅当 $a = b = \sqrt{3}$, 注意到这是最小值, 最大值显然 $a = 1, b = 2$ 时取到, 因为可以看做函数 $\frac{3}{x_1} + x_2$ 两个单调函数的和. □

2. (20A 一试) 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = x + \frac{100}{x}$ 在区间 $(0, a]$ 上的最小值为 m_1, 在区间 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 m_2. 若 $m_1 m_2 = 2020$, 则 a 的值为____.

证明. 注意到 m_1, m_2 中必有一个等于 20, 故另一个为 101, 于是有两个解 $a = 1, 100$. □

3. (21A 一试) 设函数 $f(x)$ 满足: 对任意非零实数 x, 均有 $f(x)=f(1)\cdot x+\frac{f(2)}{x}-1$, 则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为______.

证明. 代数计算 $f(2)=1, f(1)=\frac{3}{4}$, $f(x)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{x}-1$. □

4. (21A2 一试) 函数 $f(x)=2\sin^2 x-\tan^2 x$ 的最大值为______.

证明. $-2+2\sin^2 x+\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x-1}+2$. □

5. (21 浦东二模) 已知 a,b,m,n 均为正实数, 且满足 $2021a+2020b-ab=0, m+n=8\left(\frac{2020}{a}+\frac{2021}{b}\right)$, 则 $\left(m+\frac{1}{m}\right)\cdot\left(n+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)$ 的取值范围为______.

证明. 首先有 $\frac{2020}{a}+\frac{2021}{b}=1$, 所以 $m+n=8$. $\left(m+\frac{1}{m}\right)\cdot\left(n+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)=mn+\frac{1}{mn}+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}$, 注意此时不能直接两个基本不等式, 因为取等条件不能同时满足, 需要化简为一个基本不等式, 我们有的条件是 $m+n=8$, 利用它来化简式子: $\frac{n}{m}+\frac{m}{n}=\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{(m+n)^2-2mn}{mn}=\frac{64}{mn}-2$, 于是原式 $=mn+\frac{65}{mn}-2$, 基本不等式即可. □

6. (24 交附期中) 已知 $x>0$, 则 $\frac{x\cdot\sqrt{x^2+1}}{5x^2+2}$ 的最大值为______.

证明.法一: 基本不等式

$$\frac{2\sqrt{3}x\cdot\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}{5x^2+2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}\leq\frac{3x^2+2x^2+2}{5x^2+2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

法二: 三角换元, $x=\tan\alpha, x^2+1=\sec^2\alpha$, 原式为

$$\frac{\tan\alpha\cdot|\sec\alpha|}{3\tan^2\alpha+2\sec^2\alpha}=\frac{1}{3\sin\alpha+\frac{2}{\sin\alpha}}\leq\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

□

3.2 根与系数关系

1. 设 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3 - 10x + 11 = 0$ 的三个根.

   (1) 已知 x_1, x_2, x_3 都落在区间 $(-5, 5)$ 中, 求这三个根的整数部分;

   (2) 求证: $\arctan x_1 + \arctan x_2 + \arctan x_3 = \frac{\pi}{4}$.

   证明. $f'(x) = 3x^2 - 10$, 计算得整数部分为 $-4, 1, 2$.

   直接 tan 作用后两次两角和拆开, 化为 x_i 的函数, 利用根与系数关系得到 $\tan = 1$, 同时 tan 一负两正, 故必为 $\frac{\pi}{4}$. □

2. (24 交附期中) 已知 $x > 0$, 期 $\frac{x \cdot \sqrt{x^2+1}}{5x^2+2}$ 的最大值为______.

   证明. (a)

   □

3.3 反函数

有相关内容被放在了 ??奇偶性与对称性

1. (22A2 一试) 设 k, l, m 为实数, $m \neq 0$, 在平面直角坐标系中, 函数 $y = f(x) = k + \frac{m}{x-l}$ 的图像为曲线 C_1. 另一函数 $y = g(x)$ 的图像为曲线 C_2, 且满足 C_2 与 C_1 关于直线 $y = x$ 对称. 若点 $(1, 4), (2, 3), (2, 4)$ 都在曲线 C_1 或 C_2 上, 则 $f(k + l + m)$ 的值为______.

   证明. 首先 $(2, 3)$ 和 $(2, 4)$ 一定不同时在 $f(x)$ 或 $f^{-1}(x)$ 上, 同样的, $(1, 4)$ 和 $(2, 4)$ 不同时在 $f(x)$ 或 $f^{-1}(x)$ 上. 故分成两部分 $(1, 4)$, $(2, 3)$ 在同一函数, $(2, 4)$ 在另一函数.

   (a) $(2, 4)$ 在 $f^{-1}(x)$ 上. 故 $f(4) = 2 \Rightarrow 2 = k + \frac{m}{4-l}$, 同样有 $f(1) = k + \frac{m}{1-l} = 4$, $f(2) = k + \frac{m}{2-l} = 4$, 三个函数解三个未知数.

   (b) $(2, 4)$ 在 $f(x)$ 上. 同理

$\square$

3.4 抽象函数 (代数)

1. (22 重庆) 已知函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 若对任意实数 x,y,z 都有

$$\frac{1}{3}f(xy)+\frac{1}{3}f(xz)-f(x)f(yz)\geq\frac{1}{9},$$

求 $\sum_{i=1}^{100}[if(i)]$, 其中 $[x]$ 代表不超过 x 的最大整数.

证明. $x=y=z=1$, 得 $f(1)=\frac{1}{3}$;

$x=x$, $y=z=1$, $\frac{1}{3}f(x)+\frac{1}{3}f(x)-f(x)\cdot f(1)\geq\frac{1}{9}$, 得 $f(x)\geq\frac{1}{3}$;

$x=x$, $y=z=\frac{1}{x}$, $\frac{1}{3}f(x\cdot\frac{1}{x})+\frac{1}{3}f(x\cdot\frac{1}{x})-f(x)\cdot f(\frac{1}{x^2})\geq\frac{1}{9}$, 得 $\frac{1}{9}\leq f(x)\cdot f(\frac{1}{x^2})\leq\frac{1}{9}$, 故 $f(x)\equiv\frac{1}{3}$, $x\neq 0$.

$\sum_{i=1}^{100}[if(i)]=\sum_{i=1}^{100}[\frac{i}{3}]=3\cdot(1+2+\cdots+32)+33+33$ $\square$

2. 对于函数 $f(x)$, 已知 $f(1)=1$, 当 $x_1-x_2\in[2,3]$ 时有 $f(x_1)-f(x_2)\in[2,3]$, 则 $f(4)=$______.

证明. 直接问过于突兀, 原题 **??**. 实际上 $f(x+2)=f(x)+2$, $f(x+3)=f(x)+3$, 可由 $f(x+6)-f(x)$ 通过分拆 $6=2+2+2=3+3$ 得到关于 3 的性质. $\square$

3.5 函数连续性

1. (24 交附) 函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 若存在常数 $T>0$, 使得对任意的 $x\in(0,+\infty)$, 都有 $f(Tx)=f(x)+T$, 则称函数 $y=f(x)$ 具有性质 $P(T)$.

(1) 若函数 $y=f(x)$ 具有性质 $P(3)$, 求: $f(3)-f(1)$ 的值;

(2) 设 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$, 求证: 存在常数 $T>0$, 使得 $y=f(x)$ 具有性质 $P(T)$;

(3) 若函数 $y=f(x)$ 具有性质 $P(T)$, 且 $y=f(x)$ 的图像是一条连续不断的曲线, 求证: 函数 $y=f(x)$ 的值域为 R.

证明. 都是显然的, 所以是很好的入门练习. □

2. (24 建平高三月考 1 逆天难度) 已知 $\mathbb{R}$ 的子集 S 和定义域同为 D 的函数 $y=f(x), y=g(x)$. 若对任意 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1-x_2 \in S$ 时, 总有 $f(x_1)-g(x_2) \in S$, 则称 $y=f(x)$ 是 $y=g(x)$ 的一个" S 关联函数".

(1) 求 $y=x^2$ 的所有 $\{1\}$ 关联函数;

(2) 若 $y=x^2-\ln x+\frac{m}{x}$ 是其自身的一个 $[0,+\infty)$ 关联函数, 求实数 m 的取值范围;

(3) 对定义在 R 上的函数 $y=p(x)$, 证明: " $p(x)=x+p(0)$ 对任意 $x \in R$ 成立" 的充分必要条件是" 存在函数 $y=q(x)$, 使得对任意正整数 $n, y=q(x)$ 都是 $y=p(x)$ 的一个 $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ 关联函数".

证明. (1) $g(x)=f(x+1)-1=x^2+2x$;

(2) 等价于 y 单调递增, $f'(x)=2x-\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2} \geq 0, \forall x \geq 0$, 得 $m \in(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{9}]$.

(3) 过于困难, 涉及高中没有的连续性性质: 简述思路, 略去具体计算: $p(x_1)-q(x_2), p(x_3)-q(x_2)$ 均被控制, 由三角不等式得 $p(x_1)-p(x_2)$ 也被控制, 故 $p(x)$ 连续; 同理, $q(x)$ 也连续. $x_1 \rightarrow x_2$, 得 $q(x)=p(x), \forall x \in \mathbb{R}$(此处用到连续性). 条件转化为 $\frac{1}{n+1} \leq x_1-x_2 \leq \frac{1}{n}$ 时, 有 $\frac{1}{n+1} \leq p(x_1)-p(x_2) \leq \frac{1}{n}$, 故

$$
\begin{aligned}
& p(x_2)+\frac{1}{n+1} \leq p(x_2+\frac{1}{n+1}) \\
& p(x_2+\frac{1}{n}) \leq p(x_2)+\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

第一行 $\frac{1}{n+1}$ 换为 $\frac{1}{n}$, 则有 $p(x_2+\frac{1}{n})=p(x_2)+\frac{1}{n}$, 由 n 的任意性, 我们实际得到了

$$
p(x_2+q)=p(x_2)+q \quad \forall q \in \mathbb{Q} \backslash 0
$$

取 $x_2=0$, 则有 $p(q)=p(0)+q$, 即 $\forall x \in \mathbb{Q}$, 有 $p(x)=p(0)+x$, 由 $p(x)$ 的连续性得到 $p(x)=p(0)+x, \forall x \in \mathbb{R}$.

□

3. (24 七宝高三月考 1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 若 $f(x)$ 满足对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 当 $x_1 - x_2 \in M$ 时, 都有 $f(x_1) - f(x_2) \in M$, 则称 $f(x)$ 是M 连续的.

(1) 请写出一个函数 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 连续的, 并判断 $f(x)$ 是否是 $\{n\}$ 连续的 $(n \in \mathbf{N}^*)$, 说明理由;

(2) 如果 $f(x)$ 是 $[2,3]$ 连续的, 那么 $f(x)$ 是 $\{3\}$ 连续的, 也是 $\{2\}$ 连续的.

(3) 当 $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 时, $f(x) = ax^3 + \frac{1}{2}bx + 1$, 其中 $a, b \in \mathbf{Z}$, 且 $f(x)$ 是$[2,3]$ 连续的, 求 a, b 的关系.

(4) 如果 $f(x)$ 是 $[2,3]$ 连续的, 那么 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 连续的, 并由此证明 $f(x)$ 单调递增.

(5) 如果 $f(x)$ 是 $[m, m+n]$ 连续的, 且 $f(x)$ 是 $\{m\}$ 连续的, 那么 $f(x)$ 是 $[0,n]$ 连续的, $n > 0$.

(6) **开放问题** 强化你在 (3) 中给出的 a, b 关系, 即缩小 a, b 可能取值的范围.

注记 3.1. 原题中 (3) 要求的是 a, b 的取值, 关系 $a = 4 - 2b, b \in \mathbb{Z}$ 并不难求, 但取值可能性太多了, 我没有想到如何减少可能性, 于是小猿搜题, 但是搜到的答案太离谱了, 他求出的是必要性, 并没有证明充分性, 具体来说, 他找出 (a,b) 的可能取值, 记这些元素构成的集合为 P, 其直接说 P 中的元素都可以使得 $f(x)$ 满足条件. 必要性: $f(x)$ 满足条件 $\Rightarrow (a,b) \in P$, 但是这不能说明充分性: $(a,b) \in P \Rightarrow f(x)$ 满足条件.

3.6 周期函数

1. (24A 一试) 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$, 最小正周期为 5 的函数. 若函数 $g(x) = f(2^x)$ 在区间 $[0,5)$ 上的零点个数为 25 , 则 $g(x)$ 在区间 $[1,4)$ 上的零点个数为______.

证明. $[0,5) \to [1,32) = 6T + [1,2) = 25$(由此得到一个周期有四个零点, 故 $[1,2) = 1$); $[1,4) \to [2,16) = 3T - [1,2) = 11$. □

2. (24 上实高三周测 3) 已知函数 $y=f(x), x\in\mathbb{R}$ 满足 $f(x+1)=af(x), a$ 是不为 0 的实常数.

(1) 若当 $0\le x<1$ 时, $f(x)=x(1-x)$, 且函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的值域是闭区间, 求 a 的取值范围;

(2) 若当 $0<x\le 1$ 时, $f(x)=3^x+3^{-x}$, 试研究函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是否可能是单调函数? 若可能, 求出 a 的取值范围; 若不可能, 请说明理由.

证明. 过于简单, 锻炼函数问题的基本思维:

(1): 画图感受一下, 可以发现 $0<|a|\le 1$ 时都可以, 其中 $-1\le a<0$ 不易发现, 可能惯性思维只考虑了正的部分. 那么 $|a|>1$ 的部分呢? 可以发现此时函数是无界的, 所以值域不是闭区间.

(2): 显然 $a>0$, 同时因为 $a>0$, 所以在 $(n,n+1]$ 上 $f(x)$ 一定是单调递增的, 函数整体是一段段单调递增的函数拼接而成, 要是整体单调递增, 那么只要 $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)\ge f(n)$ 即可

$$\lim_{x\to n^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} a^n(3^x+3^{-x})\ge a^{n-1}\cdot\frac{10}{3}$$

故 $a\ge\frac{5}{3}$.

法二: 实际上我们可以写出 $[n,n+1]$ 上 $f(x)$ 的值域, 比较连接处大小关系即可.

注记 3.2. 分段函数 $\cup_{n\in\mathbb{N}}(n,n+1]=(0,+\infty)$ 实际给出了 $(0,+\infty)$ 一个两两不交的分割, 对于区间划分, 我们有更多东西可以讨论, 如 17 年高考压轴题 **??**.

□

3. (24 上中高三周测) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且 $f(x)f(x+1)f(x+2)=f(x)+f(x+1)+f(x+2)>0$ 恒成立, 则 $g(x)=f(x)-\sqrt{3}$ 在 $[0,2024)$ 上至少有 (　) 个零点.

A. 1348　　B. 1349　　C. 1350　　D. 1351

证明. $f(x+3)=f(x)$, 因为要找零点的最小值, 此时必有周期为 3. 令 $S=\sum f_i$, $S=\prod f_i \leq (\frac{S}{3})^3$, 得 $S\geq 3\sqrt{3}$, 故 $f_{i,max}\geq\sqrt{3}$, 同时必有 $f_i=\sqrt{3}$ 或 $f_{min}<\sqrt{3}$, 否则 $S\neq\prod f_i\geq 3f_{i,max}$. 于是两种情况, $f_{min}<\sqrt{3}$, $f_{max}>\sqrt{3}$, 至少两个零点; $f_i=\sqrt{3}$, 至少三个零点, 自然选择两个零点. $2024=672\times 3+2$, 所以还要考虑 $[0,2)$ 的零点数, 数的还有问题, 比如为什么两个零点, 不能是一个 □

3.7 奇偶性与对称性

1. 若函数 $f(x)$ 关于点 (a,b) 对称, 那么 $f(a)=$ ____.

2. (22 一试 B1) 设实数 k,l,m 满足: 函数 $y=(x+1)(x^2+kx+l)$ 的图像有对称中心 $(1,0)$, 且与函数 $y=x^3+m$ 的图像有公共点, 则 $k+l+m$ 的取值范围为 ____.

证明. 对称性得到 $x=3$ 是一个零点, 同时 $(1,0)$ 是图像上的点 ($f(1-x)+f(1+x)=0$, 故 $2f(1)=0$), 故 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-3)$, $k=-4$, $m=3$, $k+m+l=-1+l$. 计算 l 范围即可: $x^3=(x+1)(x-1)(x-3)$ 有解, 实际上是一元二次函数 $\Delta\geq 0$, 得 $l\leq\frac{37}{12}$, 故 $k+m+l\leq\frac{25}{12}$. □

3. (21B 一试) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y=ax^2-3x+3(a\neq 0)$ 的图像与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的图像关于直线 $y=x+m$ 对称, 则实数 a,p,m 的乘积为____.

证明. $f(x),g(x)$ 关于 $y=x+m$ 对称 $\Longleftrightarrow$ $f(x)-m$ 和 $g(x)-m$ 关于 $y=x$ 对称! 也就是互为反函数, $y=ax^2-3x+3-m$ 与 $y=\frac{(x+m)^2}{2p}$ 相等, 计算得 $m=-6$, $a=2$, $p=\frac{1}{4}$.

注记 3.3. $y=\sqrt{2px}-m\Rightarrow y=\frac{(x+m)^2}{2p}$, 向下平移不是直接换成 $(y-m)$, 而是 $y=...-m$!

□

4. 证明定义在 $\mathbb{R}$ 上的非常值偶函数不是单调函数.

4 幂指对函数

性质 4.1. 1. $\log_{a^n} M^m = \frac{m}{n}\log_a M$.

2. (对数换底)$\log_a N = \frac{\log_m N}{\log_m a}$

3.

指数函数与对数函数的关系同底的指数函数 $y = a^x$ 与对数函数 $y = \log_a x$ 互为反函数, 互为反函数的图象关于直线 $y =$ 指数方程和对数方程的主要类型

(1) $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b, \log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$; (定义法)

(2) $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x), \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) > 0$; (转化法)

(3) $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\log_m a = g(x)\log_m b$; (取对数法)

(4) $\log_a f(x) = \log_b g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) = \frac{\log_a g(x)}{\log_a b}$. (换底法)

4.1 填空题

1. (换底) 已知 $3^a = 5^b = c$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$, 则 $c =$ ____.

   证明. $a = \log_3 c$, $b = \log_5 c$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_c 15 = 2$, $c = \sqrt{15}$. □

2. 设 $x > 1, y > 1$, 且 $2\log_x y - 2\log_y x + 3 = 0$, $T = x^2 - 4y^2$ 的最小值是____.

   证明. 令 $\log_x y = t$, 则 $2t - \frac{2}{t} + 3 = 0$, $\frac{2t^2+3t-2}{t} = \frac{(2t-1)(2t+2)}{t} = 0$, 故 $t = \frac{1}{2}$, $x = y^2$, 考察 $y^4 - 4y^2$ 的最小值, 为 4. □

3. (24 广东预赛) 已知 m, a, b, c 为正整数, 且 $a\log_m 2 + b\log_m 3 + c\log_m 5 = 2024$, 则 $m + a + b + c$ 的最小值是____.

   证明. 由等式得 $2^a 3^b 5^c = m^{2024}$, 故 $2, 3, 5|m$, $(2\cdot 3\cdot 5)|m$, 得 m 最小值为 $2\cdot 3\cdot 5$, 同理 a, b, c 的最小值为 2024. $m + a + b + c$ 的最小值是 $30 + 3\cdot 2024 = 6102$. □

4. (24 广东预赛) 已知 $x>0, y>0, -\log_3 y+3^x=\sqrt{y}-2x=15\cdot\frac{3^{2x-1}}{y}$, 则 $\sqrt{y}+x=$______.

证明. 首先 $-\log_3 y+3^x=-\log_3(\sqrt{y})^2+3^x=-2\log_3\sqrt{y}+3^x$. 考虑第一个等号: $-2\log_3\sqrt{y}+3^x=\sqrt{y}-2x$, 等号两侧有相似结构, 观察得到解为 $x=\log_3\sqrt{y}$. 代入第二个等号: $\sqrt{y}-2\log_3\sqrt{y}=5$, 观察到 $\sqrt{y}=9$, 于是 $x=2$, $\sqrt{y}+x=11$. □

5. (23 宝山二模) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}(a>0$ 且 $a\neq 1)$, 若关于 x 的不等式 $f\left(ax^2+bx+c\right)>0$ 的解集为 $(1,2)$, 其中 $b\in(-6,1)$, 则实数 a 的取值范围是______.

证明. 由 $a>0$ 与不等式解集为 $(1,2)$ 知 a^x 为增函数, 故 $a>1$. 由韦达定理知 $-\frac{b}{a}=3$, $b=-3a$, 故 $a\in(1,2)$. □

6. (23 虹口二模) 对于定义在 R 上的奇函数 $y=f(x)$ 当 $x>0$ 时, $f(x)=2^x+\frac{9}{2^x+1}$, 则该函数的值域为______.

证明. 注意 $0\in D$, 所以值域补上 0. □

7. (24 江苏预赛) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数. 若函数 $g(x)=f(x)-x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增, 则不等式 $f(3x-1)-f(2)>(3x-3)(3x+1)$ 的解集为______.

证明. 表示出 $(3x-1)^2$, 协调不等式两边, 由单调性与奇偶性得不等式等价于 $|3a-1|<2$. □

8. (23 贵州预赛) 已知 $a>0, b>0, \log_9 a=\log_{12} b=\log_{16}(a+b)$, 则 $\frac{b}{a}$ 的值为______.

证明. 想办法把 a,b 拿出来, 令 $t=\log_9 a=\log_{12} b=\log_{16}(a+b)$, 即 $a=9^t, b=12^t, a+b=16^t$, 故 $9^t+12^t=16^t$, 我们希望计算 $\frac{b}{a}=(\frac{4}{3})^t$. 将前面的方程同除 9^t, 得 $1+(\frac{4}{3})^t=(\frac{4}{3})^{2t}$, 解一元二次方程. □

9. (14 一试) 若正数 a,b 满足 $2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log_6(a+b)$, 则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的值为______.

证明. 与习题 ??相似, 但是需要将两项合并, 即 $2+\log_2 a=\log_2 4a$. □

10. (21A 一试) 设函数 $f(x)=\cos x+\log_2 x(x>0)$, 若正实数 a 满足 $f(a)=f(2a)$, 则 $f(2a)-f(4a)$ 的值为______.

证明. $\cos a+\log_2 a=\cos 2a+1+\log_2 x \Rightarrow \cos a=2\cos^2 a \Rightarrow \cos a=0,\ \frac{1}{2}$, LEFT □

11. (22A2 一试) 若正数 a,b 满足 $\log_2 a+\log_4 b=8, \log_4 a+\log_8 b=2$, 则 $\log_8 a+\log_2 b$ 的值为______.

证明. 令 $\log_2 a=x$, $\log_2 b=y$, 于是有 $x+\frac{y}{2}=8$, $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}=2$, 解得 $x=20$, $y=-24$, $\log_8 a+\log_2 b=\frac{x}{3}+y=-\frac{52}{3}$. □

12. (21A2 一试) 定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足: 当 $x\in[0,1)$ 时, $f(x)=2^x-x$, 且对任意实数 x, 均有 $f(x)+f(x+1)=1$. 记 $a=\log_2 3$, 则 $f(a)+f(2a)+f(3a)$ 的值为______.

证明. 可提问该函数的周期. 注意到周期为 2, 因为 $f(x)+f(x+1)=f(x+1)+f(x+2)$. $a=1+\log_2\frac{3}{2}$, $2a=2+2\log_2\frac{3}{2}$, $f(2a)=f(2\log_2\frac{3}{2})$ □

13. (24 松江二模) 已知 $0<a<2$, 函数 $y=\begin{cases}(a-2)x+4a+1, & x\le 2,\\ 2a^{x-1}, & x>2.\end{cases}$ 若该函数存在最小值, 则实数 a 的取值范围是______.

证明. 第一段函数单调递减, 显然问题关键点在 $x=2$, $y(2)=6a-3$, 考虑 $2a$ 在 $a<1,=1,>1$ 的三种情况.

$a=1$, 可行;

$a>1$, 单调递增, $2a\ge 6a-3\Rightarrow a\le\frac{3}{4}$ 与 >1 矛盾;

$a<1$, 单调递减趋于 0, 故 $6a-3\le 0\Rightarrow a\le\frac{1}{2}$;

综上 $a\in(0,\frac{1}{2}]\cup\{1\}$. □

14. (24A 一试) 若实数 $m>1$ 满足 $\log_9(\log_8 m)=2024$, 则 $\log_3(\log_2 m)$ 的值为____.

证明. $\frac{1}{2}\log_3(\frac{1}{3}\log_2 m)=2024$, $\log_3(\log_2 m)=4049$. □

4.2 解答题

1. 若实数 a,b,c 满足 $2^a+4^b=2^c$, $4^a+2^b=4^c$, 求 c 的最小值

2. 已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$, 求 $\frac{x^2+x^{-2}-2}{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}-3}$ 的值.

证明. 因为 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3, \left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=9, x+2+x^{-1}=9$, 所以 $x+x^{-1}=7$, 所以 $\left(x+x^{-1}\right)^2=49, x^2+x^{-2}=47$. 又因为 $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(x-1+x^{-1}\right)=3\times(7-1)=18$, 所以 $\frac{x^2+x^{-2}-2}{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}-3}=\frac{47-2}{18-3}=3$. □

3. 已知 $3^a=5^b=c$, 且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$, 则 $c=$____.

证明. 由 $3^a=c$ 得 $\log_c 3^a=1$, 即 $a\log_c 3=1$, 所以 $\log_c 3=\frac{1}{a}$. 同理可得 $\frac{1}{b}=\log_c 5$, 所以由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$ 得 $\log_c 3+\log_c 5=2$, 所以 $\log_c 15=2$, 所以 $c^2=15$. 因为 $c>0$, 所以 $c=\sqrt{15}$. □

4. 函数 $y=3^{4-5x-x^2}$ 的单调递增区间是____.

5. 已知函数 $f(x)=a^x+\frac{x-2}{x+1}(a>1)$, 证明:

(1) 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上为增函数.

(2) 方程 $f(x)=0$ 没有负数根.

证明. 假设 x_0 是方程 $f(x)=0$ 的负数根, 且 $x_0\neq-1$, 则 $a^{x_0}+\frac{x_0-2}{x_0+1}=0$, 即 $a^{x_0}=\frac{2-x_0}{x_0+1}=\frac{3-(x_0+1)}{x_0+1}=\frac{3}{x_0+1}-1$ (1). 当 $-1<x_0<0$ 时, $0<x_0+1<1$, 所以 $\frac{3}{x_0+1}>3$, 所以 $\frac{3}{x_0+1}-1>2$. 由 $a>1$ 知 $a^{x_0}<1$, 所以 (1) 式不成立. 当 $x_0<-1$ 时, $x_0+1<0$, 所以 $\frac{3}{x_0+1}<0$, $\frac{3}{x_0+1}-1<-1$. 而 $a^{x_0}>0$, 所以 (1) 式不成立. 综上所述, 方程 $f(x)=0$ 没有负数根. □

6. 已知函数 $f(x)=\log_a\left(a^x-1\right)(a>0$ 且 $a\neq 1)$. 证明:

(1) 函数 $f(x)$ 的图象在 y 轴的一侧.

(2) 函数 $f(x)$ 图象上任意两点连线的斜率都大于 0 .

证明. (1) 由 $a^x-1>0$ 得 $a^x>1$. 当 $a>1$ 时, $x>0$, 即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 此时函数 $f(x)$ 的图象在 y 轴的右侧; 当 $0<a<1$ 时, $x<0$, 即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$, 此时函数 $f(x)$ 的图象在 y 轴的左侧. 所以函数 $f(x)$ 的图象在 y 轴的一侧.

(2) 设 $A\left(x_1,y_1\right), B\left(x_2,y_2\right)$ 是函数 $f(x)$ 图象上任意两点, 且 $x_1<x_2$, 则直线 AB 的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}, y_1-y_2=\log_a\left(a^{x_1}-1\right)-\log_a\left(a^{x_2}-1\right)=\log_a\frac{a^{x_1}-1}{a^{x_2}-1}$. 当 $a>1$ 时, 由 (1) 知 $0<x_1<x_2$, 所以 $1<a^{x_1}<a^{x_2}$, 所以 $0<a^{x_1}-1<a^{x_2}-1$, 所以 $0<\frac{a^{x_1}-1}{a^{x_2}-1}<1$, 所以 $y_1-y_2<0$. 又 $x_1-x_2<0$, 所以 $k>0$. 当 $0<a<1$ 时, 由 (1) 知 $x_1<x_2<0$, 所以 $a^{x_1}>a^{x_2}>1$, 所以 $a^{x_1}-1>a^{x_2}-1>0$, 所以 $\frac{a^{x_1}-1}{a^{x_2}-1}>1$, 所以 $y_1-y_2<0$. 又 $x_1-x_2<0$, 所以 $k>0$. 所以函数 $f(x)$ 图象上任意两点连线的斜率都大于 0 . $\square$

7. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 其图象关于直线 $x=1$ 对称, 且对任意 $x_1,x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 都有 $f\left(x_1+x_2\right)=f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)$.

(1) 设 $f(1)=a>0$, 求 $f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{4}\right)$.

(2) 证明: $f(x)$ 是周期函数.

8. 设 $f(x)=|\lg x|, a, b$ 是满足 $f(a)=f(b)=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 的实数, 其中 $0<a<b$.

(1) 证明: $a<1<b$.

(2) 证明: $2<4b-b^2<3$.

9. 已知不等式 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{12}\log_a(a-1)+\frac{2}{3}$ 对于大于 1 的正整数 n 恒成立, 试确定 a 的取值范围.

证明. 观察左侧单调性即可. □

10. (22 一试 A6) 已知函数 $y=f(x)$ 的图像既关于点 $(1,1)$ 中心对称, 又关于直线 $x+y=0$ 轴对称. 若 $x\in(0,1)$ 时, $f(x)=\log_2(x+1)$, 则 $f(\log_2 10)$ 的值为______.

证明. 关于 $x+y=0$ 对称, 联想到反函数关于 $x-y=0$ 对称, 此时有 $(x,f(x))$ 对称到 $(-f(x),x)$, 所以有LEFT □

11. (19B 一试) 设 a,b,c 均大于 1 , 满足 $\begin{cases}\lg a+\log_b c=3\\ \lg b+\log_a c=4\end{cases}$, 则 $\lg a\cdot\lg c$ 的最大值为______.

证明. 换为以 10 为底后两个方程用于消元, 最后化为一元三次函数, 求导, 得最大值为 $\frac{16}{3}$. □

5 三角函数

5.1 填空题

1. (24 位育四模)(向量与三角) 正实数 x,y 满足: 存在 $a\in[0,x]$ 和 $b\in[0,y]$, 使得 $a^2+y^2=2, b^2+x^2=1, ax+by=1$, 则 $x+y$ 的最大值为______.

证明. $\overrightarrow{OA}=(a,y)$, $\overrightarrow{OB}=(x,b)$, 于是有 $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{OB}|=1$, 所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{4}$, 将 $\overrightarrow{OB}$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 $\overrightarrow{OB'}$, 此时 $\overrightarrow{OB}=(-b,x)$, 令 $\angle BOx=\alpha$, 于是 $y=\sqrt{2}\cdot\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$, $x=1\cdot\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})$. □

2. (24 甘肃预赛) 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 2 , 且满足 $2\sin B\sin C=1, \cos 2A+3\sin^2\frac{B+C}{2}-1=0$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为______.

证明. 看到外接圆半径 R, 使用正弦定理 $\dfrac{b}{\sin B}=2R=4$. 代入等式得 $\dfrac{b}{2\sin B}\cdot\sin B\cdot\dfrac{c}{4}=1$, 故 $bc=8$, 希望使用面积公式 $S=\dfrac{bc}{2}\sin A$. 解第二个方程: $(2\cos^2 A)-1+3\cdot\dfrac{1-\cos A}{2}-1=4\cos^2 A-3\cos A-1=(4\cos A+1)(\cos A-1)=0$, 故 $\cos A=-\dfrac{1}{4}$, $\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. □

3. (24 江苏预赛) 已知函数 $f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x(\omega>0)$. 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上恰有三个极值点和两个零点, 则 ω 的取值范围为_____.

证明. $f(x)=2\sin(\omega x+\frac{pi}{3})$, 得 $\frac{pi}{3}<\omega x+\frac{pi}{3}<\omega\pi+\frac{\pi}{3}$, 结合图像知 $\frac{5\pi}{2}<\omega\pi+\frac{\pi}{3}\leq 3\pi$. □

4. (11 一试) 若 $\cos^5\theta-\sin^5\theta<7\left(\sin^3\theta-\cos^3\theta\right)(\theta\in[0,2\pi))$, 则 θ 的取值范围为_____.

证明. $7\cos^3\theta+\cos^5\theta<7\sin^3\theta+\sin^5\theta$, 实际考虑函数 $f(x)=7x^3+x^5$, 显然单调递增, 故不等式等价于 $\cos\theta<\sin\theta$. □

5. (12 一试) 设 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边分别为 a,b,c, 且满足 $a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$. 则 $\frac{\tan A}{\tan B}$ 的值为_____.

证明. 正弦定理与 $\sin C=\sin(A+B)$. □

6. (23 贵州预赛) 在 $\triangle ABC$ 中, $a^2+b^2+c^2=2\sqrt{3}ab\sin C$, 则 $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=$_____.

证明. $a^2+b^2+a^2+b^2-2ab\cos C=2\sqrt{3}ab\sin C$, 故 $a^2+b^2=ab(\sqrt{3}\sin C+\cos C)=2ab\sin(C+\frac{\pi}{6})\geq 2ab\Rightarrow C=\frac{\pi}{6}$, 同时等号成立等价于 $a=b$, 所以 $\triangle ABC$ 实际是等边三角形. □

7. (19A 一试) 对任意闭区间 I, 用 M_I 表示函数 $y=\sin x$ 在 I 上的最大值. 若正数 a 满足 $M_{[0,a]}=2M_{[a,2a]}$, 则 a 的值为_____.

证明. 由 $\sin x$ 单调性知 $a\geq\frac{\pi}{2}$, 故 $M_{[a,2a]}=\frac{1}{2}$, $\sin a=\frac{1}{2}$ 或 $\sin 2a=\frac{1}{2}$. □

8. (20A 一试) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=6, BC=4$, 边 AC 上的中线长为 $\sqrt{10}$, 则 $\sin^6\frac{A}{2}+\cos^6\frac{A}{2}$ 的值为_____.

证明. PICTURE 记中点为 D, $\cos\angle ADB=-\cos\angle CDB$, 利用余弦定理得到 AC, 再计算得 $\cos A$. $\sin^6\frac{A}{2}+\cos^6\frac{A}{2}=(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2})(\sin^4\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}+\cos^4\frac{A}{2})=(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2})^2-\frac{3}{4}\sin^2 A$. □

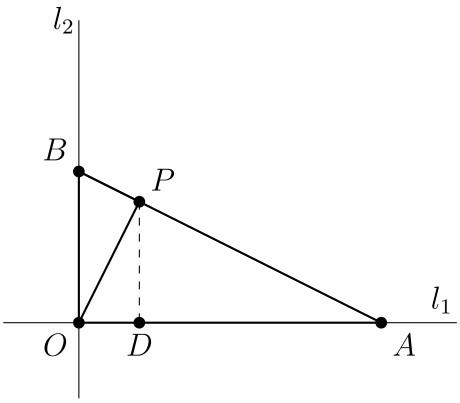
9. (21A 一试) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=1, AC=2, B-C=\frac{2\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

证明. 取 AC 上点 D 使得 $CD=BD$, 解三角形 ABD 得到角 A, $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\sin A$. □

10. (22A2 一试) 函数 $f(x)=\sin 2022x+|x-11|+|x-27|$ 的最小值为_____.

证明. 注意存在 $x\in[11,27]$ 使得 $\sin x=-1$, 所以最小值为 25. □

11. (24 徐汇二模) 如图, 两条足够长且互相垂直的轨道 l_1, l_2 相交于点 O, 一根长度为 8 的直杆 AB 的两端点 A, B 分别在 l_1, l_2 上滑动 (A, B 两点不与 O 点重合, 轨道与直杆的宽度等因素均可忽略不计), 直杆上的点 P 满足 $OP\perp AB$, 则 $\triangle OAP$ 面积的取值范围是 _____.



证明. 作 $PD\perp OA$, 令 $\angle OAB=\alpha$, 表示 $S_{\Delta ABC}$: $AO=8\cos\alpha$, $OP=8\cos\alpha\sin\alpha$, $AP=8\cos^2\alpha$, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 64\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2\alpha\cdot(\frac{\cos 2\alpha+1}{2})=8\sin 2\alpha(\cos 2\alpha+1)=g(\alpha)$. $g'(\alpha)=8\cdot(2\cos 2\alpha(\cos 2\alpha+1)-2\sin^2 2\alpha)=16(2\cos^2 2\alpha+\cos 2\alpha-1)=16(2\cos 2\alpha-1)(\cos 2\alpha+1)$, $2\alpha\in(0,\pi)$, 故 $\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$ 时取到极值 $6\sqrt{3}$, 同时趋于 $1,-1$ 时极小值 0. 范围为 $(0,6\sqrt{3}]$. □

12. (24 复附) 已知 α 为第二象限角, $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos 2\alpha=$______.

证明. $\sin 2\alpha=-\frac{2}{3}$, 因为 $\sin\alpha+\cos\alpha>0$, 所以 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$, 故 2α 在第三象限, $\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$. □

13. (24 复附) 已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0\leq\varphi<2\pi)$ 的图像与直线 $y=b(0<b<A)$ 的三个相邻交点的横坐标依次是 $1,2,4$, 则 $\varphi=$______.

证明. 作图, 发现 $4-1$ 实际上是一周期, 同时 $x=\frac{1+2}{2}$ 处取得最大值, 即 $\frac{3}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$. □

14. (21B 一试) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=1,AC=2,\cos B=2\sin C$, 则 BC 的长为______.

证明. 对 B,C 用正弦定理即可, 计算得 $B=\frac{\pi}{4}$, $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{4}$, 在对 A 做正弦定理, 计算得 $BC=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2}$. □

5.2 选择题

1. (22 虹口 1.14) 设函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x$, 其中 $a>0,b>0$. 若 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立, 则下列结论正确的是 (　　)

   A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

   B. $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{3\pi}{4}$ 对称

   C. $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增

   D. 过点 (a,b) 的直线与函数 $f(x)$ 的图像必有公共点

   $f(x)=c\sin(x+\alpha)$, 注意到 $x=\frac{\pi}{4}$ 时取到最大值, 同时 x 的系数是 1, 知 $f(x)$ 只经历了平移, 纵向拉伸, 横向并没有变化! 周期仍为 2π, 由此知 ABC 均错误.

   推论 5.1. 强化 D 选项: 如果过点 (a,d) 的直线与函数 $f(x)$ 的图像必有公共点, 那么 d 的范围取值是______.

看图像, 在 $f(x)$ 的值域范围内即可, 故 $[-c, c]$, 同时注意到与横坐标取值无关.

2. (22 一试 B1) 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 若 $\tan(\alpha+\beta)=2, \tan(\alpha+2\beta)=3$, 则 $\tan\alpha$ 的值为 ____.

证明. $\tan(\alpha+2\beta)=\tan((\alpha+\beta)+\beta)$, 计算出 $\tan\beta=\frac{1}{7}$, 代回 $\tan(\alpha+\beta)$, 得到 $\tan\alpha=\frac{13}{9}$. □

5.3 解答题

1. (自编) 如果 $0<\alpha, \beta, \gamma$ 且 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, 那么存在三角形边长恰为 $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$. 并由此计算 $\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cos 50^\circ$.

2. (19A 一试) 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=a, CA=b, AB=c$. 若 b 是 a 与 c 的等比中项, 且 $\sin A$ 是 $\sin(B-A)$ 与 $\sin C$ 的等差中项, 求 $\cos B$ 的值.

证明. $b^2=ac$,

$$\begin{aligned}
2\sin A &= \sin(B-A)+\sin C \\
&= \sin(B-A)+\sin(A+B) \\
&= 2\sin B\cos A \quad \text{(思路: 统一三角, 去掉余弦)} \\
&= 2\sin B\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\
a &= b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\
2ac &= ac+c^2+a^2
\end{aligned}$$

解得 $\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 带入得 $\cos B=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$(余弦定理). □

3. (好题! 24 复附高二月考)

在自然界中, 蜂巢是蜜蜂的家园, 由紧密排列的六角形蜂房连结在一起组成 (如图 1 所示). 研究发现, 蜂房的形状为" 曲顶多面体", 其中开口的下底面可以近似看成平面正六

边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, 而蜂房的" 上顶", 由三个全等的菱形 $SAHC, SEJC, SEKA$ 闭合组成 (如图所示 2 所示), 蜂房的" 侧棱" AA_1, HB_1, CC_1, JD_1 , EE_1, KF_1 均垂直于底面 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, 且满足关系 $AA_1 = CC_1 = EE_1 > HB_1 = JD_1 = KF_1$.

蜂房" 上顶" 的" 弯曲度" 可用" 曲率" 来刻画, 定义其" 弯曲度" 的度量值等于蜂房顶端三个菱形的各个顶点的" 曲率" 之和, 而每一顶点的" 曲率" 定义为 2π 减去蜂房多面体在该顶点的各个面角之和 (多面体的面角是多面体的面的内角, 用弧度制表示) , 例如: 正四面体在每个顶点有 3 个面角, 每个面角是 $\frac{\pi}{3}$, 所以正四面体在各顶点的曲率为 $2\pi - 3 \times \frac{\pi}{3} = \pi$.

3

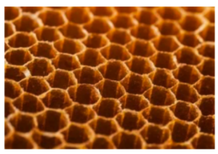


图 1

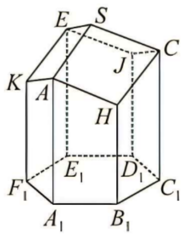


图 2

(1) 求蜂房" 上顶" 的" 曲率";

(2) 若图 2 所示的蜂房满足 $\angle AHC = \angle AHB_1 = \angle CHB_1 = \theta$, 求 θ 的余弦值;

(3) 若蜂房的底面正六边形边长 $A_1B_1 = 1$, " 侧棱" $AA_1 = 2$, 求当蜂房的表面积最小时, 顶点 S 的" 曲率" 的余弦值.

证明. (1) 注意到角度和是三个菱形内角和加上六对平行线 ($AA_1 \parallel HB_1$ 给出 $\angle A_1AH + \angle AHB_1 = \pi$), 于是曲率为 $2\pi - 3 \times 2\pi - 6 \times \pi = -10\pi$.

(2) 这是一道好题: 为了求 $\cos\theta$, 实际上就是求一个未知数, 那就要列出一个方程. 与角度有关, 那自然想到在三角形中用角与边长的关系得到方程, 解方程得到 $\cos\theta$, 所以基本策略就是使用正弦定理或余弦定理. □

6 极限

6.1 填空题

1. (22 闵行 8) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\begin{vmatrix} \sqrt{a_{n+1}} & 1 \\ a_n - 6 & 1 \end{vmatrix} = 0, n \in \mathbb{N}^{\star}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$______.

证明. $\sqrt{a_{n+1}} - (a_n - 6) = 0$, 极限存在, 记为 a, 在等式两边同时取极限, 得 $\sqrt{a} - a + 6 = 0$, $-(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-2) = 0$, 因为 $a > 0$, 所以 $a = 4$. □

7 数列

7.1 填空题

1. (22 长宁一模) 已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $a_4, S_5, S_7 \in \{-10, 0\}$, 则 S_n 的最小值为______.

证明. 自然的想法是先考虑某一项等于 0 或-10 会发生什么, 但是情况很多, 计算很复杂, 更便捷的方法是注意到 $S_7 = 7a_4$, 所以 $a_4 = 0$, $a_1 = -3d$. $S_5 = -10$, $5(a_1 + 2d) = -10$, $a_1 + 2d = -2$, $d = 2$, $a_1 = -6$, 所以 $n = 3, 4$ 时 S_n 取到最小值 $3a_2 = 3(-4) = -12$. □

2. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 5, a_{n+1} = \frac{(a_{n+1})^2}{2a_n} + \frac{a_n}{2}\,(n \in \mathbf{N}^*)$, 则其前 10 项和为______.

3. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{6}{7}, a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, 0 \leqslant a_n < \frac{1}{2}, \\ 2a_n - 1, \frac{1}{2} \leqslant a_n < 1, \end{cases}$ 则 $a_{2010} =$______.

4. (21 浙江预赛) 设 $a_0 = 0, a_1 = a_2 = 1, a_{3n} = a_n, a_{3n+1} = a_{3n+2} = a_n + 1 (n \geq 1)$, 则 $a_{2021} =$______.

证明. Step by step 即可. $a_{2021} = 6$. □

5. (21 浙江预赛) 给定实数集合 A, B, 定义运算

$$A \otimes B=\{x \mid x=ab+a+b, a \in A, b \in B\}.$$

设 $A=\{0,2,4,\cdots,18\}, B=\{98,99,100\}$, 则 $A \otimes B$ 中的所有元素之和为______.

证明. 实际上 $(a_1 \otimes B) \cap (a_2 \otimes B)=\varnothing$, 如果 $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$. 所求实际上是等差数列求和. □

6. (24 广东预赛) 数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意 $n \geq 2, a_n=2024a_{n-1}-n$. 如果该数列的每一项都是正数, 则 a_1 的最小值为______.

证明. □

7. (24 浙江预赛) 已知数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}, x_{n+1}=x_n\sqrt{\frac{n(n+1)}{x_n^2+n(n+1)}}, n \geq 1$, 则通项 $x_n=$______.

证明. 分母比分子大, 故考虑倒数的平方: $\dfrac{1}{x_{n+1}^2}=\dfrac{x_n^2+n(n+1)}{x_n^2 n(n+1)}=\dfrac{1}{x_n^2}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$. 归纳得 $\dfrac{1}{x_n^2}=\dfrac{1}{x_1^2}+1-\dfrac{1}{n}$, $x_n=\sqrt{\dfrac{n}{3n-1}}, n \geq 1$. □

8. (24 江苏预赛) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, 其前 n 项和为 S_n. 若对任意的正整数 m, n, 当 $m>n$ 时, 恒有 $a_{m+n}+a_{m-n}=2a_m+2a_n$, 则 S_{10} 的值为______.

证明. 取 $n=1$, 有 $a_{m+1}+a_{m-1}=2a_m+2$, $a_{m+1}-a_m=a_m-a_{m-1}+2$, 故数列 $\{b_n\}=\{a_2-a_1\}$ 是等差数列. □

9. (09 一试) 使不等式 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}<a-2007\frac{1}{3}$ 对一切正整数 n 都成立的最小正整数 a 的值为______.

证明. 考虑数列 $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$, $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+2}<0$, 单调递减, 所以考虑 $a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<a-2007\frac{1}{3}$ 即可. □

10. (09 一试) 一个由若干行数字组成的数表, 从第二行起每一行中的数字均等于其肩上的两个数之和, 最后一行仅有一个数, 第一行是前 100 个正整数按从小到大排成的行. 则最后一行的数是____.(可以用指数表示).

证明. 注意到每行都是等差数列, 公差为 2^{n-1}, n 为行数, 且一共 100 行. 同时观察猜测首项递推关系为 $a_{n+1}=2a_n+2^{n-1}$, 即可计算 a_{100}. □

11. (10 一试) 双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右半支与直线 $x=100$ 围成的区域内部 (不含边界) 整点 (纵横坐标均为整数的点) 的个数为____.

证明. 注意到 $x-1<y<x$, 同时确定好哪些是边界不需要计数. □

12. (10 一试) 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 其中, $a_1=3, b_1=1, a_2=b_2, 3a_5=b_3$, 且存在常数 α,β 使得对每一个正整数 n 都有 $a_n=\log_\alpha b_n+\beta$. 则 $\alpha+\beta=$____.

证明. 算出 $d=6$, $a_n=6n-3, b_n=9^{n-1}$, 带入等式即可. □

13. (23 贵州预赛) 若数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的通项公式为

$$a_n=\frac{n^2+1000}{n}\ln\frac{n^2+n+1000}{n^2+1000},$$

则使得 a_n 取最小值的 $n=$____.

证明. 一眼处理: $a_n=\frac{n^2+1000}{n}\ln(1+\frac{n}{n^2+1000})$, 即函数 $x\ln(1+x)$, 显然单调递增, $\frac{n^2+1000}{n}=n+\frac{1000}{n}\geq 2\sqrt{1000}$ 等号成立当且仅当 $n=\sqrt{1000}\notin\mathbb{Z}$, 考察 $n=32,33$ 带入后哪个更小, 得到 $n=32$. □

14. (14 一试) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_{n+1}=\frac{2(n+2)}{n+1}a_n, n\geq 1$, 则 $\frac{a_{2014}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2013}}=$____.

证明. $a_n = 2^{n-1}(n+1)$ 是等比乘等差, 计算 $S_n = n2^n$ 即可. □

15. (14 一试) 设实数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}+1, a_2 = \sqrt{2}+1, a_{n+1}+a_{n-1} = \frac{n}{a_n-a_{n-1}}+2, n \geq 2$. 则通项公式 $a_n =$______.

证明. 归纳. □

16. (14 一试) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 组成的数列满足 $S_n+S_{n+1}+S_{n+2} = 6n^2+9n+7, n \geq 1$. 已知 $a_1 = 1, a_2 = 5$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

证明. $S_{n+3} - S_n = a_{n+3} - a_n = 12$, 得到三段等差数列, 计算 a_3 后发现是统一的. □

17. (22 四川) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{2k+1} = \frac{a_{2k}^2}{a_{2k-1}}$, 且 $a_{2k+2} = 2a_{2k+1} - a_{2k}\,(k \in \mathbb{N}_+)$. 则 a_{2022} 的末两位数字是 ______.

证明. $a_{2k+1} = \frac{a_{2k}^2}{a_{2k-1}} \Rightarrow$ 等比; $a_{2k+2} = 2a_{2k+1} - a_{2k} \Rightarrow$ 等差. 我们写一下前几项:

$$1, 2, 4, 6, 9, 12, 16,...$$

观察到 $a_{2k-1} = k^2$, 由此可计算 $a_{2k} = \sqrt{a_{2k+1} \cdot a_{2k-1}} = k(k+1)$. $a_{2022} = 1011 \cdot 1012$, 末两位为 32. □

18. (24 复附高二开学考) 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 并且有 $6S_n = (a_n+1)(a_n+2)$, 若不等式 $a_2a_n < 0$ 对任意不等于 2 的正整数 n 恒成立, 则满足条件的数列有 ________ 个.

证明. 条件最关键的是 $a_2a_n < 0$, 也就是 a_2 与其他项均异号. 我首先做了一些尝试, 也就是考虑 a_n 的前几项: $6a_1 = a_1^3 + 3a_1 + 2$, 得到下述几种路线:

$$\begin{cases} a_1=1,\ a_2=-1 \begin{cases} a_3=1,\ a_4=4\cdots \\ a_3=2,\ a_4=5\cdots \end{cases} \\ \\ a_1=2,\ a_2=-2 \begin{cases} a_3=1,\ a_4=4\cdots \\ a_3=2,\ a_4=5\cdots \end{cases} \end{cases}$$

求 a_4 的过程实际上是已知 S_3, 代入到等式 $6S_4=6(S_3+a_4)=a_4^2+3a_4+2$, 解这个一元二次方程 (以 a_4 为未知数), 发现他有一个负根一个实根, 根据 $a_2a_n<0$, 我们只能选择正根作为 a_4, 更一般的, 对于任意 n, 求 a_n 实际都化为了一元二次方程求根 (解方程 $6S_{n-1}+6a_n=a_n^2+3a_n+2$), 同时我猜测从 $n=4$ 开始, 它都是一个正根一个负根, 那么就要证明这个猜测. 该猜测即为 $a_n^2-3a_n+(2-6S_{n-1})=0$ 两根异号, 我们用求根公式写出两根:

$$a_n=\frac{3\pm\sqrt{9-4(2-6S_{n-1})}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1+24S_{n-1}}}{2}$$

两根异号等价于两种情况下分子异号, 也就是 $3-\sqrt{1+24S_{n-1}}<0$, 等价于 $9<1+24S_{n-1}$, 即 $S_{n-1}>\frac{1}{3}$, 注意到无论 a_1,a_2 怎么取, 均有 $a_3\geq 1>\frac{1}{3}$, 同时 $a_i>0$ 对任意 $i\geq 4$, 所以有 $S_{n-1}>\frac{1}{3}$, 即 a_n 的解一定是一正一负, 舍去负根, 正根唯一, 即确定 a_1,a_2,a_3 后, a_i 取值唯一, $i\geq 4$. 此时问题就转化为了 a_1,a_2,a_3 的取值有多少可能, 由上图的分析, 一共四种可能. □

19. (19B 一试) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数, 首项 $a_1=2019$, 且对任意正整数 n, 总存在正整数 m, 使得 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_m$. 则这样的数列 $\{a_n\}$ 的个数为 ____.

证明. $a_1+a_2=a_m$, 得 $d\mid 2019$, 故 $d\in\{\pm1,\pm3,\pm673,\pm2019\}$, 其中负数只有 -2019 可行. □

20. (24 华二高三开学考) 已知首项为 2 , 公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意的不相等的两个正整数 i,j, 都存在正整数 k, 使得 $a_i+a_j=a_k$ 成立, 则公差 d 的取值构成的集合是 ____.

证明. 和 19 一试一样, $a_1+a_2=4+d=2+md$, 所以 $d\mid 2$, 故 $d\in\{\pm1,\pm2\}$, 注意到 -1 不成立. □

21. (21B 一试) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=a_3=1$, 令 $b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}, n\geq 1$. 若 $\{b_n\}$ 是公比为 3 的等比数列, 求 a_{100} 的值.

证明. $b_{n+1}-b_n=a_{n+3}-a_n=2\cdot 3^n$, 所以

$$a_{100}=a_1+2(3^{97}+3^{94}+\cdots+3)=\frac{3^{100}+10}{13}$$

□

22. (21 上海预赛) 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1011$, 且对任意正整数 n, 均有 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2a_n$, 则 $a_{2021}=$ ____.

证明. $S_n=n^2a_n\Rightarrow S_{n+1}-S_n=(n+1)^2a_n-n^2a_n=a_{n+1}$, 故 $a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$, 计算得 $a_{2021}=\frac{1}{2021}$. □

23. (24 静安二模) 已知等比数列的前 n 项和为 $S_{\mathrm{s}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+a$, 则 a 的值为____.

证明. 先写几项: $a_1=\frac{1}{2}+a$, $S_2=\frac{1}{4+a}$, $S_3=\frac{1}{8}+a$, 故 $a_2=-\frac{1}{4}$, $a_3=-\frac{1}{8}$, 于是 $q=\frac{1}{2}$, 得 $a_1=\frac{1}{2}\Rightarrow a=-1$. □

注记 7.1. 注意到我们可以用 a 表示任意的 a_n, 因为等比, 我们又可以用 a_n 表示 q, 即用多个关于 a 的式子表示 q, 这就给出了解出 a,q 需要的方程.

7.2 选择题

1. (23 奉贤二模) 设 S_n 是一个无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若一个数列满足对任意的正整数 n, 不等式 $\frac{S_n}{n}<\frac{S_{n+1}}{n+1}$ 恒成立, 则称数列 $\{a_n\}$ 为和谐数列, 有下列 3 个命题:

(1) 若对任意的正整数 n 均有 $a_n<a_{n+1}$, 则 $\{a_n\}$ 为和谐数列;

(2) 若等差数列 $\{a_n\}$ 是和谐数列, 则 S_n 一定存在最小值;

(3) 若 $\{a_n\}$ 的首项小于零, 则一定存在公比为负数的一个等比数列是和谐数列. 以上个命题中真命题的个数有 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

证明. $\frac{S_n}{n}<\frac{S_{n+1}}{n+1}$ 指的是均值上升, 由此得出 (1) 正确; 对于等差数列 $\{a_n\}$ 必有公差 $d>0$, 由此得出 (2) 正确; 考虑 (3):

$$\begin{aligned}\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}&=a_1(\frac{1+q+\cdot+q^n}{n+1}-\frac{1+q+\cdot+q^{n-1}}{n})\\&=a_1\cdot\frac{nq^n-1-q-\cdots-q^{n-1}}{n(n+1)}\\&>0\\&\iff nq^n-\frac{1-q^n}{1-q}>0\\&\iff (n+1)q^n-nq^{n+1}-1>0\end{aligned}$$

注意到 $q<-1$ 即可. □

2. (23 宝山二模) 将正整数 n 分解为两个正整数 k_1,k_2 的积, 即 $n=k_1\cdot k_2$, 当 k_1,k_2 两数差的绝对值最小时, 我们称其为最优分解. 如 $20=1\times20=2\times10=4\times5$, 其中 4×5 即为 20 的最优分解, 当 k_1,k_2 是 n 的最优分解时, 定义 $f(n)=|k_1-k_2|$, 则数列 $\{f(5^n)\}$ 的前 2023 项的和为 ( )

A. 5^{1012}　　B. $5^{1012}-1$　　C. 5^{2023}　　D. $5^{2023}-1$

7.3 解答题

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\frac{2009-10^n}{2010-10^n}\,(n\in\mathbf{N}^*)$. 问: 是否存在 $N,M\in\mathbf{N}^*$, 使得 $a_N\leqslant a_n\leqslant a_M$?

证明. 由 $a_n=1-\frac{1}{2010-10^n}$, 当 $n\leqslant 3$ 时, $2010-10^n>0, a_n$ 单调递减, 当 $n\geqslant 4$ 时, $10^n-2010>0$, 故 $a_n=1+\frac{1}{10^n-2010}$ 单调递减, 且当 $n\leqslant 3$ 时, $a_n<1$, 而当 $n\geqslant 4$ 时, $a_n>1$. 所以存在 $N=3, M=4$, 使 $a_3\leqslant a_n\leqslant a_4$. □

2. 已知 $a_n=3\times 2^n$, 把数列 $\{a_n\}$ 的各项排成三角形状, 如图, 用 $f(i,j)$ 表示第 i 行中第 j 个数, 如 $f(4,3)=a_{12}=3\times 2^{12}$, 则 $f(10,8)=$______.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & a_1 & & & \\
 & & a_2 & a_3 & a_4 & & \\
 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16}
\end{array}$$

3. 已知 $a_1=1, a_2=3, a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$, 如果当 $n\geqslant m$ 时, a_n 均能被 9 整除, 求 m 的最小值.

证明. 由条件可得 $a_{n+2}-a_{n+1}=(n+2)\left(a_{n+1}-a_n\right)=(n+2)(n+1)\left(a_n-a_{n-1}\right)=\cdots=(n+2),(n+1)\cdots 4\cdot 3\cdot\left(a_2-a_1\right)=(n+2)!$. 从而 $a_n=a_1+\left(a_2-a_1\right)+\cdots+\left(a_n-a_{n-1}\right)=1!+2!+3!+\cdots+n!(n\geqslant 1)$. 经计算不难得到 $a_1=1, a_2=3, a_3=9, a_4=33, a_5=153=9\times 17$, 当 $m\geqslant 6$ 时, $9\mid m!$, 所以当 $m\geqslant 5$ 时, $9\mid a_m$. 而 $9\times a_4$, 于是 $m_{\min}=5$. □

4. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_{n+1}=a_n^2+6a_n+6\,(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n=\frac{1}{a_n-6}-\frac{1}{a_n^2+6a_n}$, 证明: 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 满足 $T_n\in[-\frac{5}{16},-\frac{1}{4})$.

证明. (1) 由 $a_{n+1}=a_n^2+6a_n+6$ 得 $a_{n+1}+3=(a_n+3)^2$, 所以 $a_n+3=(a_{n-1}+3)^2=(a_{n-2}+3)^{2^2}=\cdots=(a_1+3)^{2^{n-1}}$, 所以 $a_n=5^{2^{n-1}}-3$.

(2) 因为 $b_n=\frac{1}{a_n-6}-\frac{1}{a_n^2+6a_n}=\frac{1}{a_n-6}-\frac{1}{a_{n+1}-6}$, 所以 $T_n=\frac{1}{a_1-6}-\frac{1}{a_{n+1}-6}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{5^{2^n}-9}$. 而 $0<\frac{1}{5^{2^n}-9}\leqslant\frac{1}{5^2-9}=\frac{1}{16}$, 所以 $-\frac{5}{16}\leqslant T_n<-\frac{1}{4}$. □

5. (22 闵行) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 前 n 项和为 S_n, a_1,a_2,a_3,a_4 的平均值为 4, a_4,a_6,a_7,a_8 的平均值为 12.角标错了?

(1) 求证 : $S_n=n^2$;

(2) 是否存在实数 t, 使得 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-t\right|<1$, 对任意 $n\in\mathbb{N}^\star$ 恒成立, 若存在, 求出 t 的范围, 若不存在, 说明理由.

(1) 直接读出 $3d=8$

6. (22 青浦一模) 如果数列 $\{a_n\}$ 每一项都是正数, 且对任意不小于 2 的正整数 n 满足 $a_n^2\leqslant a_{n-1}a_{n+1}$, 则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 M.

(1) 若 $a_n=p\cdot q^n, b_n=an+b\,(p,q,a,b$ 均为正实数), 判断数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是否具有性质 M, 并说明理由;

(2) 若数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都具有性质 $M, c_n=a_n+b_n$, 证明: 数列 $\{c_n\}$ 也具有性质 M;

(3) 设实数 $a\geqslant 2$, 方程 $x^2-ax+1=0$ 的两根为 $x_1,x_2,a_n=x_1^n+x_2^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$, 若 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}>n-1$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立, 求所有满足条件的 a.

(1) 显然等比数列具有性质 M, 所以 $a_n\in M$. $b_2^2-b_1b_3$, $(2a+b)^2-(a+b)(3a+b)=a^2>0$, 所以不具备性质 M.

(2) $a_n \le \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$, $b_n \le \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$, $c_n \le \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} + \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$, $c_n^2 \le a_{n-1}a_{n+1} + b_{n-1}b_{n+1} + 2\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}b_{n-1}b_{n+1}}$

7. (24 甘肃预赛) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = (n-1)\cdot 2^{n+1} + 2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n^2}$, 记 b_n 的前 n 项和为 S_n, 若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 求证: $\sum_{i=1}^{n} [S_i] < n$.

证明. (1) 显然, $a_n = 2^n$.

(2) $b_n = 2^{-n} + 2^{-2n}$. $S_n = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^{2n}}$, $S_1 - \dfrac{3}{4} < 1$, 所以 $[S_1] = 0$, 又因为 $S_n < 2$, 故 $[S_n] \le 1$, 因此 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[S_i] < n$ 成立. □

8. (10 一试) 求证: 方程 $2x^3 + 5x - 2 = 0$ 恰有一个实数根 r, 且存在唯一的严格递增的正整数数列 $\{a_n\}$, 使得 $\frac{2}{5} = r^{a_1} + r^{a_2} + \cdots$.

证明. 导数 > 0 故仅有一个实数根 r, 有 $2r^3 + 5r = 2 \Rightarrow \frac{2}{5} = r + \frac{2r^3}{5}$, $\frac{2}{5} = r\cdot\frac{1}{1-r^3}$, 幂级数展开得 $a_n = 3n-2$. 唯一性, 如果存在 $\{b_n\} \ne \{a_n\}$ 使得 $\sum r^{b_n} = \frac{2}{5}$, 考虑最小的 n 使得 $b_n \ne a_n$, 不妨 $b_n < a_n = 3n-2$, 即 $b_n \le 3n-1$, 同时由 $\{b_n\}$ 单调递增, 知 $\displaystyle\sum_{m=n}^{\infty} r^{b_m} \le \sum_{i=0}^{\infty} r^{3n-1+i} < r^{3n-2}$(由 $r \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$, 实际上小于 $\frac{1}{2}$ 即可), 故 $\sum r^{b_n} < \sum r^{a_n} = \frac{2}{5}$. □

9.

引理 7.2. 证明 $(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3$.

(12 一试) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为非零实数, 且对任意的正整数 n, 都有 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3$.

(1) 当 $n = 3$ 时, 求所有满足条件的三项组成的数列 a_1, a_2, a_3;

(2) 是否存在满足条件的无穷数列 $\{a_n\}$, 使得 $a_{2013}=-2012$? 若存在, 求出这样的无穷数列的一个通项公式; 若不存在, 说明理由.

证明. 令 $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$, 则 $S_{n+1}^2-S_n^2=a_{n+1}^3$, 即 $2a_{n+1}S_n+a_{n+1}^2=a_{n+1}^3$.LEFT □

10. (13 一试) 设正项数列 $\{x_n\}$ 满足 $S_n\geq 2S_{n-1}, n\geq 2$, 这里 S_n 是数列 $\{x_n\}$ 的前 n 项和. 求证: 存在常数 $C>0$, 使得 $x_n\geq C\cdot 2^n$ 对任意正整数 n 成立.

证明. 第一反应是反证: 任取 $C>0$, 存在 $n\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $x_n<C\cdot 2^n$. 分析题目: $S_n\geq 2S_{n-1}\geq\cdots\geq 2^{n-1}x_1$. 反证法要找矛盾, 那只能与 $S_n\geq 2S_{n-1}$ 矛盾, 即需要 $S_{n-1}+x_n\leq 2S_{n-1}$, 那么取 $C=\frac{1}{4}x_1$ 即可, 因为此时存在 n 使得 $x_n<2^{n-2}x_1\leq S_{n-1}$, 故矛盾. □

11. (18A 一试) 已知实数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 满足：对任意正整数 n, 有 $a_n(2S_n-a_n)=1$, 其中 S_n 表示数列的前 n 项和. 求证:

(1) 对任意正整数 n, 有 $a_n<2\sqrt{n}$;

(2) 对任意正整数 n, 有 $a_na_{n+1}<1$.

证明. (1) $a_n(2S_n-a_n)=(S_n-S_{n-1})(S_n+S_{n-1})=1$, 即 $S_n^2=S_{n-1}^2+1$ 为等差数列.

$a_1\cdot(2a_1-a_1)=1\Rightarrow a_1^2=1$, 故 $S_n^2=n$, $S_n=\pm\sqrt{n}$. $|S_n-S_{n-1}|<\sqrt{n}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n}$,

故 (1) 成立;

(2) $a_na_{n+1}=(S_n-S_{n-1})(S_{n+1}-S_n)$, 分类讨论即可.

□

12. (21A 一试) 已知复数列 $\{z_n\}$ 满足:

$$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad z_{n+1}=\overline{z_n}\left(1+z_ni\right),n\geq 1,$$

其中 i 为虚数单位. 求 z_{2021} 的值.

证明. 计算得 $z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{4}i$, $\operatorname{Re}z_3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 猜想 $\operatorname{Re}z_n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 考虑 $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+bi$, 带入得

$$z'=\overline{z}(1+zi)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{3}{4}+b^2-b\right)i$$

即 $\operatorname{Im}z_{n+1}-\dfrac{1}{2}=(\operatorname{Im}z_n-\dfrac{1}{2})^2=(0-\dfrac{1}{2})^{2^n}$, $\operatorname{Im}z_n=(-\frac{1}{2})^{2^{n-1}}+\frac{1}{2}$. 故 $z_n=\frac{\sqrt{3}}{2}+[(-\frac{1}{2})^{2^{n-1}}+\frac{1}{2}]i$. □

13. (19A 一试) 对正整数 n 及实数 $x(0\le x<n)$, 定义

$$f(n,x)=(1-\{x\})\cdot \mathrm{C}_n^{[x]}+\{x\}\cdot \mathrm{C}_n^{[x]+1},$$

其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, $\{x\}=x-[x]$. 若整数 $m,n\ge 2$ 满足

$$f\left(m,\frac{1}{n}\right)+f\left(m,\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(m,\frac{mn-1}{n}\right)=123,$$

求 $f\left(n,\frac{1}{m}\right)+f\left(n,\frac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n,\frac{mn-1}{m}\right)$ 的值.

证明. LEFT □

14. (24 华二高三开学考) 已知函数 $f(x)=\frac{2^x}{2^x+\sqrt{2}}$.

(1) 求证: 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 对称;

(2) 设 $S_n=\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=4^{S_n+\sqrt{2}}$, 设 T_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 其中 $b_n=\frac{a_{n+1}}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$, 若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 均有 $T_n<\lambda$ 恒成立, 求 λ 的最小值.

证明. (2) $S_n=\frac{n}{2}$(此处对称性对初学者较难), $a_n=4^{\frac{n}{2}+\sqrt{2}}$, $b_n=2(\frac{1}{a_n+1}-\frac{1}{a_{n+1}+1})$, 裂项相消得 $T_n=2(\frac{1}{a_1+1}-\frac{1}{a_{n+1}+1})$, 考虑极限即可. □

15. (24 曹二高二月考 1) 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数. 若存在 $M>0$, 使得对任意正整数 n, $|a_n|\le M$ 恒成立, 则称 $\{a_n\}$ 为有界数列; 记 $b_i=|a_{i+1}-a_i|,(i=1,2,3\cdots,n-1)$,

若存在 $T>0$, 使得对任意 $n\geq 2,\ n\in N, b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}\leq T$ 恒成立, 则称 $\{a_n\}$ 为有界变差数列.

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{n^2}$, 判断 $\{a_n\}$ 是否为有界数列? 是否为有界变差数列?（只需写出结论）;

(2) 设 $q\in\mathbb{R}$. 若首项为 1 , 公比为 q 的等比数列 $\{c_n\}$ 为有界变差数列, 求 q 的取值范围;

(3) 已知两个严格增的无穷数列 $\{d_n\}$ 和 $\{e_n\}$ 均为有界数列. 记 $f_n=d_n\cdot e_n$, 证明: 数列 $\{f_n\}$ 为有界变差数列.

证明. (1). $\{a_n\}$ 有界且为有界变差. 有界是显然的, 我们证明有界变差.

法一: 由 $a_i>0$ 得 $b_i=|a_{i+1}-a_i|<a_{i+1}$, 故

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i<\sum_{i=2}^{n} a_i$$

注意到

$$\sum_{i=2}^{n} a_i=\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i^2}<\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(i-1)}=\sum_{i=2}^{n}(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i})=\frac{1}{1}-\frac{1}{n}<1.$$

所以 $\sum b_i<1$, 有界.

法二: $b_i=\left|\frac{1}{(i+1)^2}-\frac{1}{i^2}\right|=\frac{2i+1}{i^2(i+1)^2}\leq\frac{4i}{i^2(i+1)^2}\leq\frac{4}{i(i+1)}=4\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right).$

求和得到 $\sum b_i\leq 4$, 故有界.

(2). $c_n=q^{n-1}$, $b_i=|q^i-q^{i-1}|=|q|^{i-1}|1-q|$ 实为以 $|q|$ 为公比的等比数列, 求和有界等价于收敛, 故 $0<|q|<1$ 即可.

(3). 每次都想着单调有界必有极限, 然后拿上确界来做, 但实际用不到这些超纲的东西.

设 $|d_i| \le M_1$, $|e_i| \le M_2$.

$$\begin{aligned} b_i &= |d_{i+1}e_{i+1} - d_i e_i| \\ &= |d_{i+1}e_{i+1} - d_{i+1}e_i + d_{i+1}e_i - d_i e_i| \\ &\le |d_{i+1}e_{i+1} - d_{i+1}e_i| + |d_{i+1}e_i - d_i e_i| \\ &\le M_1(e_{i+1} - e_i) + M_2(d_{i+1} - d_i) \end{aligned}$$

于是有 $\sum b_i \le M_1(M_2 - e_1) + M_2(M_1 - d_1)$ 有界.

□

8 导数

8.1 填空题

1. (23 奉贤二模) 已知 $y = f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \ge 0$ 时, $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{25}{4}\ln(x+1) + \frac{12}{\pi}\cos\frac{\pi}{3}x + a$, 则 $y = f(x)$ 的驻点为______.

证明. 即求导函数 $f'(x)$ 的零点:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x + \frac{25}{4(x+1)} - 4\sin\frac{\pi}{3}x \\ &= (x+1) + \frac{25}{4(x+1)} - 4\sin\frac{\pi}{3}x - 1 \\ &\le 5 - 4\sin\frac{\pi}{3}x - 1 \\ &= 4 - 4\sin\frac{\pi}{3}x \end{aligned}$$

知 $f'(x) \ge 0$, 等号成立当且仅当 $x = \frac{3}{2}$(由基本不等式等号成立条件与 $\sin\frac{\pi}{3}x = 1$ 得出). 再由奇函数得驻点为 $\pm\frac{3}{2}$. □

2. (14 一试) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{\pi}{6}, a_{n+1} = \arctan(\sec a_n), n \ge 1$. 求正整数 m, 使得

$$\sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdots \sin a_m = \frac{1}{100}.$$

证明. $\tan a_{n+1} = \frac{1}{\cos a_n}$, $\sin a_{n+1} = \frac{\cos a_{n+1}}{\cos a_n}$, 故 $\sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdots \sin a_m = \sin a_1 \frac{\cos a_2}{\cos a_1} \cdots \frac{\cos a_m}{\cos a_{m-1}} = \tan a_1 \cos a_m$ 问题转化为求 $\cos a_m$ 表达式: $\sin^2 a_{n+1} = \frac{\cos^2 a_{n+1}}{\cos^2 a_n}$, $1 - \cos^2 a_{n+1} = \frac{\cos^2 a_{n+1}}{\cos^2 a_n}$, $\frac{1}{\cos^2 a_n} = \frac{1-\cos^2 a_{n+1}}{\cos^2 a_{n+1}} = \frac{1}{\cos^2 a_{n+1}} - 1$, 即可计算. □

8.2 导数与函数

1. (22 静安二模) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2_{(}a+1)x + a\ln x$, 其中 a 为常数.

   (1) 若 $a = -2$, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(2, f(2))$ 处的切线方程.

   (2) 当 $a < 0$ 时, 求函数 $y = f(x)$ 的最小值.

   (3) 当 $0 \le a < 1$ 时, 讨论 $y = f(x)$ 的零点个数.

2. (24 上实四模) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2$.

   (1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 求函数的单调区间;

   (2) 若 $f(x) \le 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

   (3) 求证: $2\ln(n+1) < 3 + \frac{5}{4} + \frac{7}{9} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2}$.

   证明. (1) $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$, 若 $f'(x) = \frac{1}{x} - x > 0$, 又因为 $x > 0$, 于是有 $x \in (0, 1]$ 时单调上升; 若 $f'(x) = \frac{1}{x} - x < 0$, 又因为 $x > 0$, 于是有 $x > 1$ 时单调下降.

   (2) $f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax$,

   i. $a = 0$, 显然不成立;

   ii. $a < 0$, 对任意 $x > 1$, 我们有 $f(x) = \ln x - ax^2 > 0$, 所以不成立;

   iii. $a > 0$, 此时 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax$ 先正后负, 所以有最大值, 即考虑 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$, 此时 $f(\frac{1}{\sqrt{2a}}) = -\frac{1}{2}\ln(2a) - \frac{1}{2} \le 0$, $e^{-1-\ln 2} \le a$, 即 $\frac{1}{2e} \le a$.

   (3) **法一:** 即证 $2\ln(n+1) < \sum_{i=1}^{n} \frac{2i+1}{i^2}$. 典型的一侧对数, 一侧求和, 先处理右侧, $\frac{2i+1}{i^2} = \frac{i^2+2i+1}{i^2} - 1 = \left(\frac{i+1}{i}\right)^2 - 1$, 右侧即为 $\sum_{i=1}^{n}((1+\frac{1}{i})^2 - 1)$. 考虑左侧 $2\ln(n+1) =$

$2(\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ \ln\frac{n+1}{n})=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{i})^2$. 考虑函数 $f(x)=\ln(1+\frac{1}{x})^2-(1+\frac{1}{x})^2+1$, 作变量代换 $y=(1+\frac{1}{x})^2>1$, 于是有 $f(y)=\ln y-y+1=\ln(1+y-1)-(y-1)<0$, 于是每一项都小于 0, 故求和小于 0.

法二: 归纳法: $A_1<B_1$ 且 $(A_{n+1}-A_n)\le(B_{n+1}-B_n),\forall n\ge 1\Rightarrow A_n<B_n$.

令 $A_n=2\ln(n+1)$, $B_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{2i+1}{i^2}$.

1. $2\ln 2<3$, 因为 $e^{2\ln 2}=4<e^3$;

2. $A_{n+1}-A_n=2\ln(1+\frac{1}{n+1})$, $B_{n+1}-B_n=\frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2-1$. 回顾第一问: $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$ 在 $x\ge 1$ 时单调递减, 故 $f(x)\le f(1)=-\frac{1}{2}$, $x>1$, 等价于 $2\ln x\le x^2-1$. 代入 $x=1+\frac{1}{n}$, 故 $A_{n+1}-A_n\le B_{n+1}-B_n$.

$A_n=A_1+\sum_{i=1}^{n-1}(A_{i+1}-A_i)<B_n=B_1+\sum_{i=1}^{n-1}(B_{i+1}-B_n)$. 原命题得证.

□

注记 8.1. 如果 $x\ge 0$, 那么 $\ln(1+x)\le x$, 等号成立当且仅当 $x=0$.

证明. $f(x)=\ln(1+x)-x$, $x\ge 0$. $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}\le 0$, 故 $f(x)$ 单调递减, 且 $x>0$ 时严格单调递减, $f(0)=0$, 故论断成立. □

3. (24 江苏预赛) 函数 $y=\sqrt{x-5}+\sqrt{25-x}$ 的值域为______.

证明. (a) 法一: 柯西不等式: $(\sqrt{x-5}\cdot 1+\sqrt{25-x}\cdot 1)\le\sqrt{(x-5+25-x)\cdot(1+1)}=2\sqrt{10}$, 最小值看两端点即可;

(b) 法二: 求导得到极值点: $y'=\dfrac{\sqrt{25-x}-\sqrt{x-5}}{\sqrt{}\cdot\sqrt{}}$ 显然单调递减, 零点为 $x=15$.

□

4. (20A 一试) 设 $a,b>0$, 满足: 关于 x 的方程 $\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+a|}=b$ 恰有三个不同的实数解 x_1,x_2,x_3, 且 $x_1<x_2<x_3=b$, 则 $a+b$ 的值为______.

证明. (法一) 注意到如果 x_0 是解, 那么 $-x_0-a$ 也是解, 方程共三个解, 故必有一解为 $\frac{x_0-x_0-a}{2}=-\frac{a}{2}$, 带入得 $b=\sqrt{2a}$, 再带入 $x=b$ 是一解, 得 $a+b=144$.

(法二) 给了 $a, b>0$, 老实分类:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}+\sqrt{-x-a} & x \leq -a; \\ \sqrt{-x}+\sqrt{x+a} & -a \leq x \leq 0; \\ \sqrt{x}+\sqrt{x+a} & x \geq 0.\end{cases}$$

判断单调性, 显然有 $x \in(-\infty,-a)$ 时单调递减, $x \in(0,+\infty)$ 时单调递增. 对于 $x \in (-a, 0)$, 求导判断出先增后减, 拐点是 $x=-\frac{a}{2}$. 同时 $f(-a)=f(0)$, 故三个解当且仅当 $b=f(-\frac{a}{2})$, 同样得到 $b=\sqrt{2a}$.

□

5. (24 华二高三开学考) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2} x^2-(a+1) x+a \ln x$. (其中 a 为常数)

(1) 若 $a=-2$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;

(2) 当 $a<0$ 时, 求函数 $y=f(x)$ 的最小值;

(3) 当 $0 \leqslant a<1$ 时, 试讨论函数 $y=f(x)$ 的零点个数, 并说明理由.

证明. 分析导函数考虑极值点即可, $0<a<1$ 一个, $a=0$ 两个 (此时定义域为 $x \in \mathbb{R}$ 还是 $x>0$ 我并不确定, 因为原题中为 $\ln x$). □

6. (24 南模高三开学考) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & x>1\end{cases}$, 若存在实数 x_1, x_2 满足 $0 \leq x_1<x_2$, 且 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$, 则 $x_2-6 x_1$ 的取值范围为______.

证明. 直接上 $\ln x_2=3 x_1$, 所以有 $x_2=e^{3 x_1}$, $x_2-6 x_1=e^{3 x_1}-6 x_1$, 即考察函数 $f(x)= e^{3 x}-6 x$ 在 $[0,1]$ 上的取值范围, 求导后观察单调性即可, $[2-2 \ln 2, e^3-6]$. □

7. 当 $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ 时, 证明: $\tan x + \sin x \ge 2x$.

证明. $f(x) = \tan x + \sin x - 2x$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x - 2 \ge \frac{2}{\sqrt{\cos x}} - 2 \ge 0$, $f(0) = 0$, 故 $f(x) \ge 0$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$. □

8. (23 全国 I 卷) 已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$, 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

证明. 因为不等号右边为定值, 故证明左边最小值大于右边即可, $f' = ae^x - 1 = 0$, 得 $x = -\ln a$, 希望证 $f(-\ln a) = 1 + a^2 + lna > 2\ln a + \frac{3}{2}$, 考虑函数 $g(x) = a^2 - \ln a - \frac{1}{2}$ 的最小值即可, $g'(x) = 2a - \frac{1}{a} = 0$, 得 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \ln\sqrt{2} > 0$. □

9. (24 上中高三上期中) 若定义在 R 上的函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 分别存在导函数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$. 且对任意 x 均有 $f'(x) \ge g'(x)$, 则称函数 $y = f(x)$ 是函数 $y = g(x)$ 的" 导控函数". 我们将满足方程 $f'(x) = g'(x)$ 的 x_0 称为" 导控点"

(1) 试问函数 $y = x$ 是否为函数 $y = \sin x$ 的" 导控函数"?

(2) 若函数 $y = \frac{2}{3}x^3 + 8x + 1$ 是函数 $y = \frac{1}{3}x^3 + bx^2 + cx$ 的" 导控函数", 且函数 $y = \frac{1}{3}x^3 + bx^2 + cx$ 是函数 $y = 4x^2$ 的" 导控函数", 求出所有的" 导控点";

(3) 若 $p(x) = e^x + ke^{-x}$ ，函数 $y = q(x)$ 为偶函数，函数 $y = p(x)$ 是函数 $y = q(x)$ 的" 导招函数", 求证: " $k = 1$ " 的充要条件是" 存在常数 c 使得 $p(x) - q(x) = c$ 恒成立。".

证明. (1). $1 \ge \cos x$.

(2). $2x^2 + 8 \ge x^2 + 2bx + c \ge 8x$, $2x^2 + 8 = 8x \iff x = 2 \Rightarrow c = 12 - 4b$, 第二个不等号给出 $\Delta \ge 0$, 带入 c, 得到 $(b-2)^2 \ge 0 \Rightarrow b = 2, c = 4$. 不清楚题目问的是哪一对函数的导控点.

(3). 先证必要性 $\Rightarrow$: 此时 $p(x) = e^x + e^{-x}$, $p(x) - q(x) = c \iff p'(x) - q'(x) = 0$, 又 $p'(x) \ge q'(x)$ 且 $p'(-x) \ge q'(-x)$(实际上是 $-p'(x) \ge -p'(x)$), 由此得到 $p'(x) - q'(x) = 0$, 故

必要性成立. 重点是注意到对于偶函数有 $f'(x)=-f'(-x)$, 可以留作习题让学生证明.

(4). 充分性 $\Leftarrow$: 此时有 $p'(x)-q'(x)=0$, 还是一样的对 $x,-x$ 两种情况求导再结合导控性质, 得到 $(k-1)(e^x+e^{-x})=0$, 故 $k=1$, 充分性成立.

$\square$

8.3 导数与数列

1. (24 南模高三开学考) 定义: 对于函数 $f(x)$ 和数列 $\{x_n\}$, 若 $(x_{n+1}-x_n)f'(x_n)+f(x_n)=0$, 则称数列 $\{x_n\}$ 具有" $f(x)$ 函数性质". 已知二次函数 $f(x)$ 图象的最低点为 $(0,-4)$, 且 $f(x+1)=f(x)+2x+1$, 若数列 $\{x_n\}$ 具有" $f(x)$ 函数性质", 且首项为 1 的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\ln(x_n+2)-\ln(x_n-2)$, 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则数列 $\left\{S_n\cdot\left(\frac{n}{2}-5\right)\right\}$ 的最小值为______.

证明. 显然有 $f(x)=x^2-4$, $f'(x)=2x$, 带入性质的关系式得 $x_{n+1}-x_n=-\frac{x_n^2-4}{2x_n}$, $x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{2}{x_n}$. 既然要计算 $S_n\cdot(\frac{n}{2}-5)$, 那就要先计算出 S_n, 这等价于弄清楚 a_n, 记住, 我们能处理的基本就是等差等比, 那这自然需要发掘 a_{n+1},a_n 的关系:

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{\ln(x_{n+1}+2)}{\ln(x_{n+1}-2)}\\&=\frac{\ln(\frac{x_n}{2}+\frac{2}{x_n+2})}{\ln(\frac{x_n}{2}+\frac{2}{x_n-2})}\\&=\ln\left(\frac{x_n+2}{x_n-2}\right)^2\\&=2a_n\end{aligned}$$

$\square$

a_n 实际上是个等比数列, 由 $a_1=1$ 得 $a_n=2^{n-1}$, $S_n=2^n-1$, 最后结果用计算器打表即可, $n=9$ 时取到 -255.5.

8.4 导数与解析几何

1. (19A 一试) 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 Ω 与抛物线 $\Gamma: y^2 = 4x$ 恰有一个公共点, 且圆 Ω 与 x 轴相切于 Γ 的焦点 F. 求圆 Ω 的半径.

证明. 注意到圆 Ω 的方程为 $(x-1)^2+(y-r)^2 = r^2$. 一个公共点: 在该点处切线相同 (为什么? 因为两个二次函数只有一个交点, 所以相切?), $2ydy = 4dx$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$; $2(x-1)dx + 2(y-r)dy = 0$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{y-r}$. 同时该点处有 $y = 2\sqrt{x}$(不妨假设交点在第一象限), 计算 $\frac{2}{2\sqrt{x}} = -\frac{x-1}{2\sqrt{x}-r}$ 得到 r, 带入圆 Ω 方程解得 x 从而得到 r. □

2. (21B 一试) 在平面直角坐标系中, 函数 $y = \frac{1}{|x|}$ 的图像为 Γ. 设 Γ 上的两点 P, Q 满足: P 在第一象限, Q 在第二象限, 且直线 PQ 与 Γ 位于第二象限的部分相切于点 Q. 求 $|PQ|$ 的最小值.

证明. 从 $Q = (x_0, -\frac{1}{x_0})$ 入手, 切线 l: $y + \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$, $l \cap y = \frac{1}{x_0}$, 得 $P = ((1 - \sqrt{2})x_0, \frac{1}{(1-\sqrt{2})x_0})$,

$$|PQ|^2 = 2x_0^2 + \frac{(2-\sqrt{2})^2}{((1-\sqrt{2})x_0)^2} \geq 4$$

故最小值为 2. □

9 复数

9.1 填空题

1. (21 浙江预赛) 设复数 $z = x + yi$ 的实虚部 x, y 所形成的点 (x, y) 在椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上. 若 $\dfrac{z-1-i}{z-i}$ 为实数, 则复数 $z =$______.

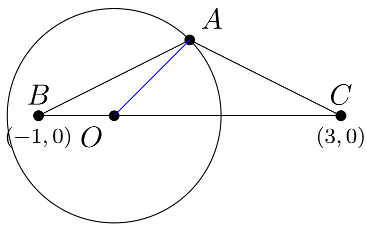
证明. 先不急着算, 注意到 $\dfrac{z-1-i}{z-i} = 1 - \dfrac{1}{z-i} \in \mathbb{R} \iff \dfrac{1}{z-i} \in \mathbb{R} \iff z - i \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im} z = 1$. 参数方程 $x = 3\cos\alpha$, $y = 4\sin\alpha = 1$, 得 x 共两解. □

2. (23 福建预赛) 已知 z_1, z_2 是互为共轭的复数, 若 $|z_1 - z_2| = 4\sqrt{3}$, $\dfrac{z_1}{z_2^2} \in \mathbb{R}$, 则 $|z_1| =$______.

证明. 注意到 $\dfrac{z_1 z_2}{z_2^3} \in \mathbb{R} \iff \dfrac{1}{z_2^3} \in \mathbb{R} \iff z_2^3 \in \mathbb{R} \iff z_2 = |z_2| \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$ or $|z_2| \cdot e^{\frac{4\pi i}{3}}$, 观察图像知 $|z_2| = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Im} z_2$, $|z_1 = z_2| = 4\sqrt{3}$ 知 $\operatorname{Im} z_2 = 2\sqrt{3}$, 于是 $|z_2| = 4$. □

3. (23 广东预赛) 已知复数 z, 满足 $z \notin \mathbb{R}, z + \frac{2}{z} \in \mathbb{R}$, 则 $|z^2 + 2z - 3|$ 的最大值为______.

证明. 使用指数形式, $z = |z|e^{i\alpha}$, $\dfrac{2}{z} = \dfrac{2}{|z|}e^{-i\alpha}$, $z + \frac{2}{z} \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(\dfrac{2}{z} + \dfrac{2}{|z|}e^{-i\alpha})$, 故 $|z| + \dfrac{2}{|z|} = 0$, 于是 $|z| = \sqrt{2}$. $|z^2 + 2z - 3| = |z+3||z-1|$(发现不是完全平方, 不能转换为 z 到定点距离的平方). 我们看一下几何:



于是 $|z+3||z-1| = |AB||AC|$, $|OB| = 1, |OC| = 3, |OA| = 2$, $\cos\angle AOB = -\cos\angle AOC$. 三边尽知, 余弦定理: □

4. (24 甘肃预赛) 若复数 z, z_1, z_2 满足: $\overline{z_1}(z_1 - 4) = 5 + 12i, z_2 = \frac{1-i}{i}, |z - z_1| = 1$, 则 $|z - z_2|$ 的最小值为______.

证明. □

5. (24 浙江预赛) 已知复数 z 满足 $z^{24} = (z-1)^{510} = 1$, 则复数 $z =$______.

证明. $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $z - 1 = (\cos\alpha - 1) + i\sin\alpha$ 仍是单位根, 所以 $\cos\alpha = -(\cos\alpha - 1)$, 得 $\cos\alpha = \frac{1}{2}, \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, 代入均满足题目中的等式. □

6. (24 江苏预赛) 设 $a \in \mathbb{R}$. 已知虚数 z 满足 $|z| = 1$, 且 $(z+a)^2 = a$, 则实数 a 的值为______.

证明. $(z+a)$ 要么是实数要么是纯虚数, 注意纯虚数时有 $a<0$. □

7. (23 贵州预赛) 设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1|=2, |z_2|=3, |z_1+z_2|=4$, 则 $\frac{z_1}{z_2}=$______.

证明. 思考 $z_1\overline{z_2}$ 与 $\frac{z_1}{z_2}$ 的区别: $z_1\overline{z_2}=|z_1||z_2|e^{i(\alpha-\beta)}$, $\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{z_2}e^{i(\alpha-\beta)}$. 已知模长, 计算角度对应的正弦值, 余弦值即可. □

8. (18A 一试) 设复数 z 满足 $|z|=1$, 且使得关于 x 的方程 $zx^2+2\bar{z}x+2=0$ 有实根. 则这样的 z 的和为______.

证明. $z=a+bi$, 注意 $b=0$ 的情况即可. □

9. (20A 一试) 设 z 为复数. 若 $\frac{z-2}{z-i}$ 为实数 (i 为虚数单位), 则 $|z+3|$ 的最小值为______.

证明. (法一): 带入 $z=a+bi$ 计算.

(法二): $\frac{z-2}{z-i}\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow z$ 在 $2, i$ 的直线上, 化为 $(-3,0)$ 到直线的最短距离.

□

10. (24 复附) 已知 $a,b,c,d\in\mathbb{C}$, 若集合 $S=\{a,b,c,d\}$ 满足: 对任意 $x,y\in S$, 均有 $xy\in S$, 若已知 $a=b^2=c^4=1$, 则 $b+c+d=$______.

证明. S 为四次单位根的集合. □

11. (22 一试 B1) 设 z_0 为复数, 集合 $A=\left\{z_0+i^k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ (i 为虚数单位). 若 A 的所有元素之和为 $8+8i$, 则 A 的所有元素之积为 ______.

证明. $4z_0=8+8i$. □

9.2 选择题

1. (22 虹口一模) 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 复数 $z = a + 2bi$ (其中 i 为虚数单位) 满足 $z \cdot \bar{z} = 4$. 给出下列结论:

(1) $a^2 + b^2$ 的取值范围是 $[1, 4]$;

(2) $\sqrt{(a-\sqrt{3})^2 + b^2} + \sqrt{(a+\sqrt{3})^2 + b^2} = 4$;

(3) $\frac{b-\sqrt{5}}{a}$ 的取值范围是 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;

(4) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的最小值为 2.

其中正确结论的个数是 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hint: 考虑 (2), (3) 的几何意义.

证明. $a = 2\cos\alpha, b = \sin\alpha$, 实际上对应了椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$; 显然有 (1) 正确; (2) 即为椭圆上点到 $(\pm\sqrt{3}, 0)$ 两点的距离和, 这两点实际上是焦点, 所以等于 4; $\frac{b-\sqrt{5}}{a}$ 实际上是斜率, 找过 $(0, \sqrt{5})$ 且与该椭圆相切的直线, 计算得 (3) 正确; $\frac{1}{4\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} \geq \frac{1}{|\sin 2\alpha|}$, 所以 (4) 错误. □

10 组合

10.1 填空题

1. (21 浙江预赛) 对于正整数 n, 若 $(xy - 5x + 3y - 15)^n$ 展开式经同类项合并, $x^i y^j (i, j = 0, 1, \cdots, n)$ 合并后至少有 2021 项, 则 n 的最小值为 ____.

证明. 证明 $x^i y^j, 0 \leq i, j \leq n+1$ 均可出现, 故 $(n+1)^2 \geq 2021$, 得 $n \geq 44$. □

2. (24 浙江预赛) 若对所有大于 2024 的正整数 n, 成立 $n^{2024}=\sum_{i=0}^{2024} a_i \mathrm{C}_n^i, a_i \in \mathbb{N}^*$, 则 $a_1+a_{2024}=$______.

证明. 组合意义. 左边: 从 n 个不同东西中有放回地取 2024 次的方法; 右: $a_i \mathrm{C}_n^i$ 指共取出 i 种东西的方法数, 即首先 C_n^i 确定多少种 i 种东西, a_i 即为这 i 种东西填满 2024 个格子的排列数, 于是 $i=1$ 时显然 $a_1=1$; $i=2024$ 时显然 $a_{2024}=2024!$. 再由多项式系数的唯一性, 知 a_i 的唯一性. □

3. (10 一试) 方程 $x+y+z=2010$ 满足 $x \leq y \leq z$ 的正整数解 (x,y,z) 的个数为______.

证明. 首先注意到只要有一组解 a,b,c 我们都可以把他从小到大排列成 $x \leq y \leq z$, (1) 三个解各不相同, 除 P_3^3; (2) 两个解相同, 除 C_3^2, (3) 全相同, 仅有 $x=y=z=670$. 所以排序实际上不是关键困难, 关键是确定各种解的数量. 因为是正整数解, 原方程的解等价于 $(x-1)+(y-1)+(z-1)=2007$ 的正整数解, 等价于 $x'+y'+z'=2007$ 的非负整数解, 于是可以插空法得解的个数为 C_{2007+2}^2, 再由 $3x<2010$ 得两个元素相同的解共 669 种, 于是符合题意的解的数量为

$$\frac{\mathrm{C}_{2009}^2-669-1}{\mathrm{P}_3^3}+669+1=336731.$$

□

4. (13 一试) 已知数列 $\{a_n\}$ 共有 9 项, 其中 $a_1=a_9=1$, 且对每个 $i \in\{1,2,\cdots,8\}$, 均有 $\frac{a_{i+1}}{a_i} \in\left\{2,1,-\frac{1}{2}\right\}$. 则这样的数列的个数为______.

证明. 0 个 1, 4 个 2, 4 个 $-\frac{1}{2}$; C_8^4;

4 个 1, 2 个 2, 2 个 $-\frac{1}{2}$; $\mathrm{C}_8^4 \mathrm{C}_4^2$;

8 个 1, 0 个 2, 0 个 $-\frac{1}{2}$; 1; □

5. (19A 一试) 将 6 个数 $2,0,1,9,20,19$ 按任意次序排成一行, 拼成一个 8 位数 (首位不为 0), 则产生的不同的 8 位数的个数为______.

证明. 全概率公式 考虑全排列 (首项不为 0)$-19-20+[19\cup 20]$:

$$\mathrm{C}_5^1\cdot\mathrm{P}_5^5-\mathrm{C}_4^1\cdot\mathrm{P}_4^4-\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{P}_3^3+\mathrm{C}_4^2=498.$$

□

6. (21A 一试) 设有理数 $r=\frac{p}{q}\in(0,1)$, 其中 p,q 为互质的正整数, 且 pq 整除 3600 . 这样的有理数 r 的个数为______.

证明. 先不考虑小于 1 的限制, 只考虑形如 $\frac{2^a3^b5^c}{2^A3^B5^C}=2^x3^y5^z$ 的有理数, 最终计算时, 大于 1 取到数即可. 因为互质, 所以有 $\min a,A=0$, 其他情况同理, 故 $x\in\{-4,-3,...,4\}$, 共 9 种情况, y,z 各 5 种, 三者均为 0 时等于 1, 故个数为

$$\frac{\mathrm{C}_9^1\cdot\mathrm{C}_5^1\cdot\mathrm{C}_5^1-1}{2}=112.$$

□

7. (20A 一试) 现有 10 张卡片, 每张卡片上写有 $1,2,3,4,5$ 中两个不同的数, 且任意两张卡片上的数不完全相同. 将这 10 张卡片放入标号为 $1,2,3,4,5$ 的五个盒子中, 规定写有 i,j 的卡片只能放在 i 号或 j 号盒子中. 一种放法称为" 好的", 如果 1 号盒子中的卡片数多于其他每个盒子中的卡片数. 则" 好的" 放法数量为______.

证明. 分析每个盒子放信的数量只有两种情况: 3 + 2221 或 4 + 其他任意

4 + 其他任意: 1 号盒以外还有 6 张牌, 每张牌有 2 种选择: 6^2.

3 + 2221: 问题是哪个盒子放一张牌, 这也就需要将 2345 盒子分类: 第一步: C_4^3, 从 2345 中选 3 个放出一号盒子 (12,13,14), 可以看出 234 与 5 是不同的 (以在不在一号盒子为分

类标准), 故分为两类: $2,3,4$ 中一张牌或 5 中一张牌, 具体写出后发现情况很少可以具体计算. □

8. (22 重庆) 至少通过一个正方体的 3 条棱中点的平面个数为____.

证明. 既考虑多点共面的面有多少:

四点共面: 6 个表面, 3 个横切面, 12 个垂直于平行面的面;

六点共面: 4 个. □

9. (24 徐汇二模) 将四棱锥 $S-ABCD$ 的每个顶点染上一种颜色, 并使同一条棱的两端点异色, 如果只有四种颜色可供使用, 则不同的染色方法总数为____.

证明. $B-A-D$, 选好 A 后看 BD 同色还是异色进行分类. 72. □

10. (22 四川预赛) 已知函数 $f:\{1,2,\cdots,10\}\to\{1,2,3,4,5\}$, 且对一切 $k=1,2,\cdots,9$, 有 $|f(k+1)-f(k)|\geq 3$. 则符合条件的函数 f 的个数为____.

证明. 马尔科夫链 $P(X_n=a_n\mid X_1=a_1,...,X_{n-1}=a_{n-1})=P(X_n=a_n\mid X_{n-1}=a_{n-1})$, 事件的发生只和上一个事件有关, 而与过去无关. 注意到 $\{1\}\to\{4,5\}$, $\{2\}\to\{5\}$, 同时 $1,5$ 等价, $2,4$ 等价.

$f(1)=1^1 2^0=(1,0)$, $f(2)=4^1 5^1=(1,1)$, $f(3)=1^2 2^1=(2,1)$, $f(4)=4^2 5^3=(2,3)$, $f(5)=1^5 2^3=(5,3)\to(5,8)\to(13,8)\to()$ □

11. (24 松江二模) 已知 $x^7=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\ldots+a_7(x-1)^7$, 则 $a_5=$____.

证明. x 换元为 $x+1$: $(x+1)^7=\sum_{i=0}^{7}a_i x^i$. □

12. (24A 一试) 若三个正整数 a, b, c 的位数之和为 8，且组成 a, b, c 的 8 个数码能排列为 $2, 0, 2, 4, 0, 9, 0, 8$, 则称 (a, b, c) 为" 幸运数组", 例如 $(9, 8, 202400)$ 是一个幸运数组. 满足 $10 < a < b < c$ 的幸运数组 (a, b, c) 的个数为____.

证明. 8=4+2+2=3+3+2, 故两个大类. **别考虑太多, 0 很好处理!**

(a) **4+2+2:** 先放 0, 直接 C_5^3, 放 2, 放 489, $\mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{P}_3^3 = 600$, 去掉 20, 20 情况, 即 $\mathrm{C}_3^1 \mathrm{P}_3^3 = 18$, 去掉顺序, 得 $\frac{600-12}{2} = 291$.

(b) **3+3+2:** 一样的方法, 去掉顺序为直接除 2, 故 300.

综上 591. □

13. (22 一试 B1) 有四所学校的学生参加一项数学竞赛, 每所学校派出 3 名选手. 组委会要抽选其中若干名选手做一项调研, 要求任意两所学校被抽中的选手数之和至少为 1，至多为 3，则不同的抽选方式为 ____.

证明. 考虑从正面还是反面, 实际上只能是 $1+0$, $1+1$, $2+1$, 总情况为 $1+1+1+0$, $1+1+1+1$, $2+1+1+0$, $2+1+1+1$ 并不复杂, 分类枚举并不复杂:

(a) **1+1+1+0:** $\mathrm{C}_4^1 3^3$;

(b) **1+1+1+1:** 3^4;

(c) **2+1+1+0:** $\mathrm{C}_4^1 \mathrm{C}_3^2 \mathrm{C}_3^1 3^2$;

(d) **2+1+1+1:** $\mathrm{C}_4^1 \mathrm{C}_3^2 3^3$

求和为 837. □

14. (21 上海预赛) 已知整数 $n > 3$, 把 n 个人分成两组, 每组至少 2 个人, 则不同的分法共有 ________ 种.

证明. $\dfrac{2^n-C_n^0-C_n^1-C_n^n-C_n^{n-1}}{2}=2^{n-1}-n-1.$ □

15. (21 上海预赛) 在正整数 $1,2,\cdots,20210418$ 中, 有多少个数的数码和是 8 ?

证明. 实际上是 $\sum a_i=8$ 非负解的问题, 分情况 $1\sim 9999999$, $10000000\sim 19999999$,... 逐步分组. □

16. A,B,C,D 四座孤立的小岛, 任意两岛间都可以建一座桥将其连接起来, 则建桥方法数为______.

证明. **反面:** 四个没有都连起来, 实际上会分成几个连通链: 1+1+1+1, 1+1+2, 2+2, 3+1. 显然只有 $3+1$ 是可能的, 故 $C_6^3-4=16$.

正面: 如果连通, 要么是一个链 $ABCD$, 要么是树 $A-B,A-C,A-D$. 计算链实际上是 $\frac{4!}{2}$, 被排列确定, 同时 $ABCD=DCBA$, 树则考虑顶点即可, $12+4=16$. □

11 概率

11.1 填空题

1. (24 甘肃预赛) 在小于 15 的正整数中, 不重复地取出 3 个数, 则它们的和能被 3 整除的概率为______.

证明. 考虑和能否被 3 整除, 显然考虑模 3 后的余数: 余数为 0: 3,6,9,12(4 个); 余数为 1: 4,7,10,13(5 个); 余数为 2: 2,5,8,11,14(5 个). 三个数的和被 3 整除只有如下情况: 1+2+0; 0+0+0; 1+1+1; 2+2+2, 故概率为 $\dfrac{C_5^1C_5^1C_4^1+C_4^3+C_5^3+C_5^3}{C_{14}^3}$. □

2. (24 江苏预赛) 有 4 道选择题, 每题有 4 个选项, 其中恰有一个选项正确, 某同学对每道选择题都随机选择一个选项, 则该同学恰好答对两题的概率为______.

证明. 显然 $\dfrac{C_4^2\cdot 3\cdot 3}{4^4}$. □

3. (10 一试) 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 其中, $a_1=3, b_1=1, a_2=b_2, 3a_5=b_3$, 且存在常数 α, β 使得对每一个正整数 n 都有 $a_n=\log_\alpha b_n+\beta$. 则 $\alpha+\beta=$______.

证明. 首先算出大于 6 的概率是 $\frac{7}{12}$(可以枚举也可以等差数列求和), 随后有概率为 $\frac{7}{12}(1+(\frac{5}{12})^2+(\frac{5}{12})^4+\cdots)$. □

4. (23 甘肃预赛) 袋中装有 m 个红球和 n 个白球, 其中 $m>n\geq 4$. 现从中任取两个球, 若取出的两个球是同色的概率等于取出的两个球是异色的概率, 则满足 $m+n\leq 40$ 的数组 (m,n) 的个数为 ______.

证明. $\frac{\mathrm{C}_m^2+\mathrm{C}_n^2}{\mathrm{C}_{m+n}^2}=\frac{\mathrm{C}_m^1\cdot \mathrm{C}_n^1}{\mathrm{C}_{m+n}^2}$, 实际只要考虑分子就可以, 因为概率空间一致, 概率相同就是事件个数相同也就是分子相同. $m(m-1)+n(n-1)=2mn \Longleftrightarrow (m-n)^2=m+n\leq 40$. □

5. (12 一试) 某情报站有 A,B,C,D 四种互不相同的密码, 每周使用其中的一种密码, 且每周都是从上周未使用的三种密码中等可能地随机选用一种. 设第一周使用 A 种密码, 那么第七周也使用 A 种密码的概率为______.

证明. 设 A_n 为第 n 次为 A 的概率, 那么有 $A_n=\frac{1}{3}(1-A_{n-1})$, 得到等比数列, 秒.

可将数字改小一些, 比如计算第五周是 A 的概率, 让学生练习枚举的方法, 加深对加法原则和乘法原则的理解. □

6. (14 一试) 设 A,B,C,D 是空间四个不共面的点, 以 $\frac{1}{2}$ 的概率在每对点之间连一条边, 任意两对点之间是否连边是相互独立的, 则 A,B 可用 (一条边或者若干条边组成的) 空间折线连接的概率为______.

证明. 枚举, 分类依据为 A 与 B 是否连接 $\Rightarrow$A 与 C 是否连接.... □

7. (14 一试) 将一副扑克牌中的大小王去掉, 在剩下的 52 张牌中随机地抽取 5 张, 其中至少有两张牌上的数字 (或者字母 J,Q,K,A) 相同的概率为 ______.

证明. 反面考虑即可: $1-\frac{\mathrm{C}_{13}^{5}4^{5}}{\mathrm{C}_{52}^{5}}$. □

8. (18A 一试) 将 $1,2,3,4,5,6$ 随机排成一行, 记为 a,b,c,d,e,f, 则 $abc+def$ 是偶数的概率为______.

证明. $\frac{\mathrm{C}_{3}^{1}}{\mathrm{C}_{6}^{3}}$. □

9. (19A 一试) 在 $1,2,3,\cdots,10$ 中随机选出一个数 a, 在 $-1,-2,-3,\cdots,-10$ 中随机选出一个数 b, 则 a^2+b 能被 3 整除的概率为______.

证明. 考虑余数: $a^2\equiv 0,1 \bmod 3$

$0: 3,6,9;$

$1: 1,2,4,5,7,8,10.$

$b\equiv 0,1,2 \bmod 3$

$0:\ -3,-6,-9;$

$1:\ -2,-5,-8;$

$2:\ -1,-4,-7,-10.$

考虑 $0+0$, $1+2$ 即可, 故概率为 $\frac{\mathrm{C}_{3}^{1}\cdot\mathrm{C}_{3}^{1}+\mathrm{C}_{7}^{1}\cdot\mathrm{C}_{4}^{1}}{\mathrm{C}_{10}^{1}\cdot\mathrm{C}_{10}^{1}}$. □

10. (21A 一试) 一颗质地均匀的正方体骰子, 六个面上分别标有点数 $1,2,3,4,5,6$. 随机地抛掷该骰子三次 (各次抛掷结果互相独立), 所得的点数依次为 a_1,a_2,a_3, 则 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_1|=6$ 的概率为______.

证明. 显然不会有三个全相等, 可能情况为三个都不同, 有一对相同, 以此为依据分类:

三个都不同: 不妨假设 $a_1>a_2>a_3$(实际上经过一次全排列即可达成).

$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_1|=2(a_1-a_3)=6$, 故 $(4,1)$, $(5,2)$, $(6,2)$ 三种情况, 每种情况中 a_2 有两个选择, 故总选择数为 $\mathrm{P}_3^3\cdot\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_2^1=36$.

一对相同: 不妨考虑 $a_1=a_2$, 此时 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_1|=2|a_1-a_3|$, 即 $|a_1-a_3|=3$, 和第一种情况一样, 不过此时 a_1 与 a_3 的大小关系不确定, 也就是有两种选择. 此时总数为 $\mathrm{C}_3^2\cdot\mathrm{C}_3^1\,\mathrm{C}_2^1=18$.

概率为 $\frac{36+18}{6^3}=\frac{1}{4}$. □

11. (21A 一试改) 一颗质地均匀的正方体骰子, 六个面上分别标有点数 $1,2,3,4,5,6$. 随机地抛掷该骰子六次 (各次抛掷结果互相独立), 所得的点数依次为 $a_1,a_2,...,a_6$, 则 $|a_1-a_2|+|a_3-a_4|+|a_5-a_6|=6$ 的概率为_____.

证明.

$$
\begin{aligned}
6&=0+1+5=0+2+4=0+3+3\\
&=1+1+4=1+2+3\\
&=2+2+2
\end{aligned}
$$

实际是计算 $|a_i-a_{i+1}|=0,1,2,3,4,5$ 的概率, 或等价地说, 个数.

0: C_6^1;

1: 10 (12, ..., 56);

2: 8 (13, 24, 35, 46);

3: 6 (14, 25, 36);

4: 4 (15, 26);

5: 2 (16).

概率为 $\dfrac{C_3^1\cdot 6\cdot C_3^1\cdot 10\cdot 2+C_3^1\cdot 6\cdot C_2^1\cdot 8\cdot 4+C_3^1\cdot 6\cdot 6^2+C_3^2\cdot 10^2\cdot 4+\cdot C_3^1\cdot 10\cdot C_2^1\cdot 8\cdot 6+8^3}{6^6}$ □

12. (22A2 一试) 在 $1,2,\cdots,10$ 中随机选出三个不同的数, 它们两两互素的概率为____.

证明. 正面考虑反面考虑都可以:

反面: 即计算存在非互素对的个数.

三个偶数: C_5^3;

两个偶数一个奇数: $C_5^2\cdot C_5^1$;

一个偶数两个奇数: 这个时候要考虑非互素对是两个奇数还是一个奇数与一个偶数. 两个奇数不互素: 只能是 39, 故 C_5^1 配一个偶数即可. 两个奇数互素, 其中一个奇数与偶数不互素: 只能是 6 与 3/9 或 10 与 5, 故 $C_2^1\cdot C_3^1+C_4^1$;

三个奇数: 其中两个必为 3, 9, 故 C_3^1.

总数为 $10+50+5+6+4+3=78$, 考虑反面, 故概率为 $\dfrac{C_{10}^3-78}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{20}$.

正面: 三个数中至多一个偶数.

三个奇数: 考虑不同时选 39 即可: $C_5^3-C_3^1$(或 $1+C_2^1\cdot C_3^2$);

一个偶数, 偶数来自于 2, 4, 8: 奇数选两个不选到 39 即可: $C_3^1\cdot(C_5^2-1)$;

偶数为 6: 奇数不选到 3 或 9 即可: C_3^2;

偶数为 10: 奇数不选到 5 且不同时选到 39: C_4^2-1;

总数为 $7+27+3+5=42$. □

13. (24A 一试) 一个不均匀的骰子, 掷出 $1,2,3,4,5,6$ 点的概率依次成等差数列. 独立地先后掷该骰子两次, 所得的点数分别记为 a,b. 若事件" $a+b=7$ " 发生的概率为 $\frac{1}{7}$, 则事件" $a=b$ " 发生的概率为____.

证明. 条件为两个方程: $a+\cdots+(a+5d)=1$, $\sum(a+id)(a+(5-i)d)=\frac{1}{7}$, 希望求的是 $\sum(a+id)^2=\frac{1}{7}+30d^2$, 前两个方程得出 d^2 即可 (都是具体展开计算). □

14. (24 交附) 用简单随机抽样的方法从含 n 个个体的总体中, 逐个抽取一个样本量为 3 的样本, 若其中个体 a 在第一次就被抽取的可能性为 $\frac{1}{8}$, 那么 $n=$______.

证明. 糊弄人的, 8. □

12 向量

12.1 填空题

1. (23 宝山二模) 已知非零平面向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 不平行, 且满足 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}^2=4$, 记 $\overrightarrow{c}=\frac{3}{4}\overrightarrow{a}+\frac{1}{4}\overrightarrow{b}$, 则当 $\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{c}$ 的夹角最大时, $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$ 的值为______.

证明. 先做 ??, 知 $\overrightarrow{a}\perp(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})$, 故可坐标化为代数计算: $\overrightarrow{a}=(2,0)$, $\overrightarrow{b}=(2,m)$, $\overrightarrow{c}=(2,\frac{m}{4})$ □

2. (23 虹口二模) 已知平面向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{e}$ 满足 $|\overrightarrow{a}|=3, |\overrightarrow{e}|=1, |\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}|=1, \langle\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e}\rangle=\frac{2\pi}{3}$ 且对任意的实数 t, 均有 $|\overrightarrow{c}-t\overrightarrow{e}|\geq|\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{e}|$, 则 $|\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}|$ 的最小值为______.

证明. 先建系, $\overrightarrow{a}=(3,0)$, $\overrightarrow{e}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$. $|\overrightarrow{c}-t\overrightarrow{e}|^2\geq|\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{e}|^2$, 即 $t^2-2\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{c}t+4\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{c}-4\geq 0$, $\Delta\leq 0$, 得 $(\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{c}-2)^2\leq 0$, 故 $\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{c}=2$, 注意这等价于 $\overrightarrow{c}$ 对应的点 (x,y) 正是直线 l: $-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=2$, $\overrightarrow{b}$ 的轨迹是以 $(3,0)$ 为原点, 半径为 1 的圆, 故最小值即为 $(3,0)$ 到直线 l 的距离减去半径. □

3. (22 普陀二模) 设 $x,y\in\mathrm{R}$, 若向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 满足 $\overrightarrow{a}=(x,1)$, $\overrightarrow{b}=(2,y)$, $\overrightarrow{c}=(1,1)$, 且向量 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{c}$ 互相平行, 则 $|\overrightarrow{a}|+2|\overrightarrow{b}|$ 的最小值为______.

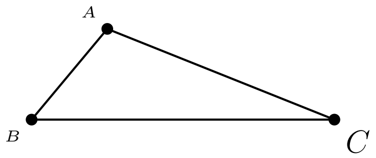
证明. 平行得到 $x+y=3$.

(a) (法一) 答案做法: 考虑向量 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$, 终点在一条直线上, 最小值即为垂直该直线时, 同时此时 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 共线, 所以达到最小值.

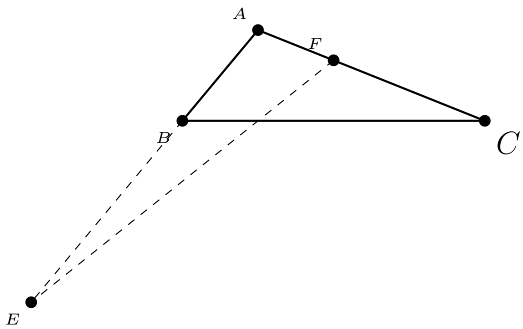
(b) (法二) 代数表示 $|\overrightarrow{a}|+2|\overrightarrow{b}|$, 考虑一阶导等于 0, 此时得到一个四次方程, 计算器求解得到两个实根, 带入后两个值中小的是最小值.

□

4. (24 徐汇二模) 如图所示, 已知 $\triangle ABC$ 满足 $BC=8, AC=3AB, P$ 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点. 定义点集 $D=\left\{P \,\middle|\, \overrightarrow{AP}=3\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1-\lambda}{3}\overrightarrow{AC}, \lambda\in\mathbf{R}\right\}$. 若存在点 $P_0\in D$, 使得对任意 $P\in D$, 满足 $|\overrightarrow{AP}|\geq\left|\overrightarrow{AP_0}\right|$ 恒成立, 则 $\left|\overrightarrow{AP_0}\right|$ 的最大值为____.



证明. 首先改写 P 的形式: $\overrightarrow{AP}=\lambda\cdot 3\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB})$, 得到下图:



$|\overrightarrow{AP_0}|\leq|\overrightarrow{AP}|$ 恒成立, 即 $AP\perp FE$, 故计算 A 到 EF 的最小值, 注意到 $\triangle AFE\simeq\triangle ABC$, 故问题转化为求 A 到 BC 距离的最小值, 注意到参数是 $AB=r$, A 即为以 B 为圆心 r 为半径的圆与以 C 为圆心 $3r$ 为半径的圆的交点: $O_1\colon x^2+y^2=r^2$, $O_2\colon (x-8)^2+y^2=9r^2$, 联立解得 x, 再由 ABP_0 为直角三角形, 解得 $|AP_0|$ 为一元函数, 求得最值. □

5. (24 南模高三周练 5) 已知平面向量 $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$ 满足 $|\vec{b}|=2, |\vec{a}+\vec{b}|=1, \vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$, 且 $\lambda+2\mu=1$. 若对每一个确定的向量 $\vec{a}$, 记 $|\bar{c}|$ 的最小值为 m. 则 m 的最小值为____.m 的最大值为____.

证明. 考虑几何意义: 不妨 $\vec{b}=(2,0)$, $|-\vec{a}-\vec{b}|=1$, 即 $-\vec{a}$ 为 $\vec{b}$ 终点半径为 1 的圆, 对称到 $\vec{a}=(-2+\cos\alpha, \sin\alpha)$, 同时 $\lambda\vec{a}+2\mu(\frac{1}{2}\vec{b})$ 即为以 $\vec{a}$ 与 $\frac{1}{2}\vec{b}$ 构成的线段上点为中点的向量, m 即为长度, 最短 0, 最长即为相切, 由相似可更快速得到 $m=\frac{1}{3}$ □

6. (24 松江二模) 已知正三角形 ABC 的边长为 2 , 点 D 满足 $\overrightarrow{CD}=m\overrightarrow{CA}+n\overrightarrow{CB}$, 且 $m>0, n>0, 2m+n=1$, 则 $|\overrightarrow{CD}|$ 的取值范围是____.

证明. $2m\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+n\cdot\overrightarrow{CM}$, 注意到只有 AM 线段且要去掉端点. □

7. (15B 一试) 正 2015 边形 $A_1A_2\cdots A_{2015}$ 内接于单位圆 O, 任取它的两个不同的顶点 A_i, A_j, $\left|\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}\right|\geq 1$ 的概率为____.

证明. $\left|\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}\right|^2=1+1+2\cos\alpha\geq 1$, 其中 α 为 A_i, A_j 的夹角, 故 $\alpha\in[-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$, 不是一般性的, 可令 $A_i=(1,0)$, 于是有 $n\cdot\frac{2\pi}{2015}\in[-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]\Rightarrow n\in[-671,671]$, 概率为 $\frac{2\cdot 671}{2014}=\frac{671}{1007}$. □

8. (24 建平高三月考 1)

9. 已知圆心为 O, 半径为 1 的圆上有三点 A,B,C, 若 $7\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, 则 $\overrightarrow{BC}$=____.

证明. $\left(5\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}\right)^2=49\Rightarrow\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}$, 又因为模长均为 1, 直接设坐标即可, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3}$. □

12.2 证明题

1. 已知非零平面向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 不平行, 且满足 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}^2$, 对任意向量 $\overrightarrow{c}=(x,y)$, 将 (x,y) 称为 $\overrightarrow{c}$ 对应的点. 证明 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$ 对应的三个点构成直角三角形.

证明. 1. (法一) $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})=0$.

2. (法二) $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的投影恰与 $\overrightarrow{a}$ 相等, $\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos\alpha=|\overrightarrow{a}|$, $\overrightarrow{b}$ 即为斜边.

□

2. (24 浙江预赛) 已知平面上单位向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 垂直, $\overrightarrow{c}$ 为任意单位向量, 且存在 $t\in(0,1)$, 使得向量 $\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}$ 与向量 $\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}$ 垂直, 则 $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}|$ 的最小值为______.

证明. $\overrightarrow{a}=(1,0), \overrightarrow{b}=(0,1), \overrightarrow{c}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}=(1,1-t)$, $\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}=(\cos\alpha-1,\sin\alpha)$, $(\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})=\cos\alpha-1+(1-t)\sin\alpha=0$ □

3. (12 一试) 设 P 是函数 $y=x+\frac{2}{x}(x>0)$ 的图象上的任意一点, 过 P 分别向直线 $y=x$ 和 y 轴作垂线, 垂足分别为 A, B. 则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的值为______.

证明. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cos\alpha$, 注意到 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, $P=(x_0,x_0+\frac{2}{x_0})$, $B=(0,x_0+\frac{2}{x_0})$, $|\overrightarrow{PA}|$ 即为点 P 到直线 $y=x$ 的距离, 计算即可. □

4. (24 华二高三开学考) 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}, |\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|=2, \frac{\pi}{3}\leqslant B\leqslant\frac{2\pi}{3}$, 则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的取值范围是 ______.

证明. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}\Rightarrow ab\cos C=bc\cos A\Rightarrow a\cos C=c\cos A\Rightarrow\frac{a}{\cos A}=\frac{c}{\cos C}$, 形式让人想到正弦定理, 让我有 $A=C$ 的冲动, 虽然我现在完全感受不到这个冲动, 并觉得该结论并不显然. 由正弦定理, $a=c\frac{\sin A}{\sin C}=c\frac{\cos A}{\cos C}$, 于是有 $\tan A=\tan C$, 所以 $A=C$, 这是个等腰三角形. $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|=2c\cos\frac{B}{2}=2$, 所以 $c=\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=c^2\cos B=\frac{\cos B}{\cos^2\frac{B}{2}}=\frac{2\cos^2\frac{B}{2}-1}{\cos^2\frac{B}{2}}=2-\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}=[-2,\frac{2}{3}]$. □

13 解析几何

13.1 填空题

1. (22 虹口一模) 圆 $x^2+y^2+4\sin\theta\cdot x+4\cos\theta\cdot y+1=0$ 的半径等于______.

证明. $(x+2\sin\theta)^2+(y+2\cos\theta)^2=3$. □

2. (22 长宁一模) 已知双曲线 $M: x^2-\frac{y^2}{6}=1$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2, 过 F_1 的直线 l 与双曲线 M 的左, 右两支分别交于点 A, B. 若 $\triangle ABF_2$ 为等边三角形, 则 $\triangle ABF_2$ 的边长为______.

3. (19B 一试) 若以 $(r+1,0)$ 为圆心, r 为半径的圆上存在一点 (a,b) 满足 $b^2\geq 4a$, 则 r 的最小值为______.

证明. (a) (法一): 参数方程. $a=r+1+r\cos\alpha$, $b=r\sin\alpha$,

$$b^2\geq 4a$$
$$(r\sin\alpha)^2\geq 4(r+1+r\cos\alpha)$$
$$r^2(1-\cos^2\alpha)\geq 4(r+1+r\cos\alpha)$$
$$r(r-4)\geq (r\cos\alpha+2)^2$$

右侧大于等于 0, 若取 $r=4$, 存在 α 使得 $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$, 右侧等于 0. 所以 r 最小值为 4.

(b) (法二): 几何意义. 圆上存在点 (a,b) 满足 $b^2\geq 4a$ 即圆与 $y^2=4x$ 有交点

□

4. (23 虹口二模) 过原点的直线 l 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的左, 右两支分别交于 M, N 两点, $F(2,0)$ 为 C 的右焦点, 若 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$, 且 $|\overrightarrow{FM}|+|\overrightarrow{FN}|=2\sqrt{5}$, 则双曲线 C 的方程为______.

证明. 易得信息: $a^2+b^2=4$, 不妨设 $|\overrightarrow{FM}|-|\overrightarrow{FN}|=2a$(由过原点直线带来的中心对称性), 再由 $|\overrightarrow{FM}|-|\overrightarrow{FN}|=2\sqrt{5}$ 用 a 来表示 $|\overrightarrow{FM}|,|\overrightarrow{FN}|$, 如何利用 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$ 垂直呢? 写成向量形式很困难, 我们目前的理想是解出 a, 从而得到曲线方程, 在 $RT\triangle FMN$ 中用勾股定理, 唯一阻碍是斜边 MN 的长度, 注意到 $|OF|=2=\frac{1}{2}|MN|$, 这是因为 l 带来的对称性使得 O 是 MN 的中点, 于是可以解得 a. □

5. (24 浙江预赛) 已知四面体 $A-BCD$ 的外接球半径为 1. 若 $BC=1,\angle BDC=60°$, 球心到平面 BDC 的距离为____.

证明. 注意到 $\triangle BCD$ 是等边三角形. □

6. (24 江苏预赛) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 O 为坐标原点. 点 A 在第一象限, 且在圆 $\Gamma\colon (x-1)^2+y^2=1$ 上. 点 B 为直线 OA 与直线 $\mu\colon \frac{x}{5}+\frac{y}{25}=1$ 的交点. 则 $\frac{|OA|}{|OB|}$ 的最大值为____.

证明. 参数方程后直接联立, 考察横坐标比值. □

7. (24 江苏预赛) 设圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $AB=2,BC=6,CD=9,AD=7$, 则该圆的直径长为____.

证明. 联结对角线, 注意到内接四边形对角互补, 于是余弦值为相反数, 由此计算对角线长度与余弦值, 再由正弦定理得直径. □

8. (14 预赛) 设 F_1,F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点, P 是椭圆上的一点. 如果 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $1,\tan\angle PF_1F_2=\frac{1}{2},\tan\angle PF_2F_1=-2$, 则 a 的值为____.

证明. 计算三角形得 a 与 c 的关系, 再由面积算出 a. □

9. (13 一试) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A, B 在抛物线 $y^2=4x$ 上, 满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$. F 是抛物线的焦点, 则 $S_{\triangle OFA}\cdot S_{\triangle OFB}=$______.

证明. $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$, $x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2-4\sqrt{x_1x_2}=-4(y_1,y_2$ 必有一负.), $(\sqrt{x_1x_2}-2)^2=0$, $\sqrt{x_1x_2}=2$, $S_{\triangle OFA}\cdot S_{\triangle OFB}=\sqrt{x_1x_2}=2$. □

10. (19A 一试) 设 A, B 为椭圆 Γ 的长轴顶点, E, F 为 Γ 的两个焦点, $|AB|=4, |AF|=2+\sqrt{3}$.P 为 Γ 上一点, 满足 $|PE|\cdot|PF|=2$, 则 $\triangle PEF$ 的面积为______.

证明. 显然有 $a=2, c=\sqrt{3}$, $|PE|+|PF|=4$, $|PE|\cdot|PF|=2$, 解得 $|PE|=2+\sqrt{2}$, $|PF|=2-\sqrt{2}$, 可以发现 $\triangle PEF$ 是 $RT\triangle$(实际上一试是喜欢简化计算的, 故经常出现直角三角形和等边三角形), 故面积为 1. □

11. (20A 一试) 在椭圆 Γ 中, A 为长轴的一个端点, B 为短轴的一个端点, F_1, F_2 为两个焦点. 若 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$, 则 $\frac{|AB|}{|F_1F_2|}$ 的值为______.

证明. $\overrightarrow{AF_1}=(-c+a,0)$, $\overrightarrow{AF_2}=(c+a,0)$; $\overrightarrow{BF_1}=(-c,b)$, $\overrightarrow{BF_2}=(c,b)$. 利用 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=a^2-c^2+b^2-c^2=0$ 得 $a^2=3b^2$, $c^2=2b^2$, 故 $\frac{|AB|}{|F_1F_2|}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4c^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. □

12. (21A 一试) 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $\Gamma: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F, 过 Γ 上一点 P (异于 O) 作 Γ 的切线, 与 y 轴交于点 Q. 若 $|FP|=2, |FQ|=1$, 则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的值为______.

证明. 抛物线坐标设法: $P=(2pt^2,2pt)$, 计算在点 P 的切线: $2ydy=2pdx$, $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}$, 切线: $y-y_p=\frac{p}{y_p}(x-x_p)\Rightarrow yy_p-2px_p=p(x-x_p)\Rightarrow y_py=p(x+x_p)$, 坐标代入 $2pt\cdot y=p(x+2pt^2)\Rightarrow 2ty=x+2pt^2$. $x=0$ 时 $y=pt$, $Q=(0,pt)$. $|FQ|^2=\frac{p^2}{4}+p^2t^2=1$, $|FP|^2=(2pt^2-\frac{p}{2})^2+(2pt)^2=(2pt^2+\frac{p}{2})^2=4$, 得 $p=1, t^2=\frac{3}{4}$. $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=2p^2t^2=\frac{3}{2}$. □

13.2 解答题

1. (22 重庆) 设 F 是双曲线 $\Gamma: x^2-y^2=1$ 的左焦点, 经过 F 的直线与 Γ 相交于 M, N 两点.

(1) 若 M, N 都在双曲线的左支上, 求 $\triangle OMN$ 面积的最小值;

(2) x 轴上是否存在一点 P, 使得 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 为定值? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

14 立体几何

14.1 填空题

1. (24 甘肃预赛) 已知点 P, A, B, C 是球 O 的球面上的四个点, PA, PB, PC 两两垂直且长度均为 18. M 是线段 AP 上的点, 且 $AM=2PM$. 记过点 M 与平面 ABC 平行的平面为 α, 则球 O 被平面 α 截得的截面周长为____.

证明. 画出图, P 为正方体的顶点, 内接在球中, 然后点到平面距离加上半径求出所截小圆的半径. □

2. (10 一试) 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 9 条棱长都相等, P 是边 CC_1 的中点. 二面角 $B-A_1P-B_1=\alpha$, 则 $\sin\alpha=$____.

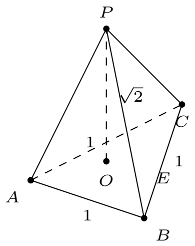
证明. 建系, 计算, $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. □

3. (23 甘肃预赛) 正四面体 $ABCD$ 的底面 BCD 的中心为 $O, AB=1$. 以 OA 为轴将正四面体旋转 90°, 则得到的四面体与原正四面体重合部分的体积为____.

证明. 注意到每个截面都是" 相似" 六边形, 故重合部分与四面体的体积比就是底面积之比, 建系后计算其中没交的一个小三角形, 由此得到面积比, 也就是体积比. □

4. (13 一试) 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 1 , 高为 $\sqrt{2}$, 则其内切球的半径为____.

证明. 取 D 为 P 在面 ABC 上的投影, O 为内接圆圆心, PE 平分 BC, OF 垂直 PE.



□

5. (20A 一试) 正三棱雉 $P-ABC$ 的所有棱长均为 $1, L, M, N$ 分别为棱 PA, PB, PC 的中点, 则该三棱雉的外接球被平面 LMN 所截的截面面积为____.

证明. 计算三棱锥的高, 由此计算外接球半径 r, 再计算外接圆圆心到截面的距离, 由此得到截面半径计算面积. □

6. (19A 一试) 正方体 $ABCD-EFGH$ 的一个截面经过顶点 A, C 及棱 EF 上一点 K, 且将正方体分成体积比为 $3:1$ 的两部分, 则 $\frac{EK}{KF}$ 的值为____.

证明. 延长补成三棱锥. □

14.2 选择题

1. 已知平行四边形 $ABCD, AB=7, BC=1, \angle ABC=120^{\circ}, E$ 是线段 CD 上一动点, 设 $AE=a$. 将 $\triangle ADE$ 沿 AE 所在的直线进行翻折, 在翻折过程中, 下列结论不正确的是 ( )

(A) 当 $a=2$ 时, 存在某个位置, 使得直线 AD 与直线 BC 垂直

(B) 当 $a=3$ 时, 存在某个位置, 使得直线 AD 与直线 BC 垂直

(C) 当 $a=4$ 时, 存在某个位置, 使得直线 AD 与直线 BC 垂直

(D) 当 $a=5$ 时, 存在某个位置, 使得直线 AD 与直线 BC 垂直

证明. 建系, $BC=(1,0)$, 故 $AD=(0,b)$, 即能转到横坐标为 0, 也就是 $\angle DAE=\frac{\pi}{4}$ 时为临界值, 实际上 A,B 两个选项均可. $\square$

15 数论

15.1 高考范畴

1. (24 上实高三周测 3) 已知四个整数 a,b,c,d 满足 $0<a<b<c<d$, 若 a,b,c 成等差数列, b,c,d 成等比数列, 且 $d-a=48$, 则 $a+b+c+d$ 的值为______.

证明. 设公差为 e, 于是有 $(a+2e)^2=(a+e)(a+48)$, 得

$$a=\frac{4e(12-e)}{3(e-16)}$$

因为 a 是整数, 所以 $3\mid e(12-e)$, 注意到这恰推出 $3\mid e$, 同时因为 $a>0$, 所以 $13\le e\le 15$, 故 $e=15$, 原数列为 $60,75,90,108$, $\sum=333$. $\square$

2. (21 上海预赛稍难一些) 设质数 p 满足 $p\equiv 1(\bmod 3)$, 且 $q=2\left[\frac{p}{3}\right]$. 若

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{(q-1)q}=\frac{m}{n}$$

这里的 m,n 是互质的正整数. 求证: p 整除 m. 其中, $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

证明. 显然 $p=3k+1$, $q=2k$. 原式为

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{m}{n}$$

标准转化:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{2k}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2k}\right)$$

即

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}=\frac{m}{n}$$

首尾依次相加得到

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p}{(k+1)2k}+\frac{p}{(k+2)(2k-1)}\cdots\right)=\frac{m}{n}$$

因为 $2k<p$, 且 p 是素数, 所以求和中每一项的分母都不整除 p, 又因为每个分子都是 p, 故 $p\mid m$. □

15.2 解答题

1. (24 甘肃预赛) 定义 $\mathbb{N}_+$ 上的函数: $\sigma(n)=d_1+d_2+\cdots+d_s$, 其中 $d_1,d_2,\cdots,d_s$ 为 n 的所有正因数. 若 $\sigma(n)=2n$, 则称正整数 n 为完美数. 例如 $\sigma(6)=1+2+3+6=12=2\times 6$, 因此 6 是一个完美数; 再如 $\sigma(9)=1+3+9=13\neq 2\times 9$, 因此 9 不是完美数.

(1) 判断 $\sigma(23),\sigma(88),\sigma(2024)$ 满足的数量关系, 并说明理由;

(2) 如果 $\gcd(m,n)=1$, 证明 $\sigma(mn)=\sigma(m)\sigma(n)$;

(3) 已知 2^k-1 为素数, 求证: $2^{k-1}\left(2^k-1\right)$ 是完美数;

(4) 是否存在完美数 q, 其可表示为某个正整数的平方? 若存在, 求出 q 所有可能值; 若不存在, 请说明理由.

证明. (1) 感觉上显然是 $\sigma(2024)=\sigma(23)\sigma(88)$, 实际上将 $\sigma(23)\sigma(88)$ 具体写出来: $(1+m_1+\cdots+m_i)(1+n_1+\cdots+n_j)$, 展开的每一项恰遍历 2024 的每一个公因数.

(2) 将 m,n 做素因子分解后显然.

(3) 直接使用 (2) 的结论.

(4)没做出来. □

性质 15.1. 欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示不大于 n 且与 n 互素的正整数的个数. 如果 p 是素数, 那么 $\varphi(p^n)=p^n-p^{n-1}$; 如果 $\gcd(m,n)=1$, 那么 $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$.

2. (24 江苏预赛) 设 n 为正整数, 欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示不大于 n 且与 n 互素的正整数的个数, 例如 $\varphi(10)=4$. 若 $\varphi(5x)=2024$, 试确定整数 x 的值.

证明. (1) $5\nmid x$. $\varphi(5x)=\varphi(5)\varphi(x)=4\varphi(x)=2024$, 故 $\varphi(x)=506=2\cdot 11\cdot 23$, 注意到 $\varphi(p^n)$ 是偶数, 因为 $\varphi(x)$ 的因子只有一个偶数, 所以 $x=p^n$, $p^{n-1}(p-1)=2\cdot 11\cdot 23$, 讨论得 $p=23, n=2$.

(2) $5\mid x$, 取 m 使得 $5^m\mid x, 5^{m+1}\nmid x$, 故 $\varphi(5x)=\varphi(5^{m+1})\varphi(x)=5^m\cdot 4\cdot\varphi(x)=2024$, 但是 $5\nmid 2024$, 得到矛盾.

□

3. (24 江苏预赛) 集合 M 为连续 n 个正整数构成的集合. 若 M 中所有元素的和恰为 2024 , 且 n 为偶数, 则集合 M 中最小的元素为______.

证明. 设这 n 个连续整数为 $m, m+1, ..., m+n-1$, $\frac{2m+n-1}{2}\cdot n=2024=8\cdot 11\cdot 23$. 注意到 $2m+n-1$ 是奇数, 故 $2\mid n$, 由 2024 的分解知 $16|n$. 分类讨论:

(1) $n=16$, 得 $m=119$;

(2) $n=16\cdot 11$ 或 $16\cdot 23$ 均不成立.

□

4. (11 一试引导题) 定义函数 $v_p(n)=\{m\in\mathbb{Z}\mid p^m\mid n, p^{m+1}\nmid n\}$, 如 $v_3(9)=2, v_3(12)=1$, 定义 $\lfloor a\rfloor$ 为不大于 a 的最大整数.

(1) 证明 $v_p(n!)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor$.

(2) 已知 $a_n=\mathrm{C}_{200}^n(\sqrt[3]{6})^{200-n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (n=1,2,\cdots,95)$, 计算数列 $\{a_n\}$ 中整数项的个数.

16 多项式

定理 16.1 (Lagrange 插值法). 设 $f(x)$ 是次数不超过 n 的多项式, 如果已知 $f(a_i)=b_i$, $i=1,...,n$, 那么

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\prod_{j\neq i}(x-a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)}$$

注记 16.1. 实际上 n 次多项式有 $n+1$ 个未知数, 所以需要 $n+1$ 个函数值来消去 $n+1$ 个未知数.

16.1 填空题

1. (20B 一试) 已知首项系数为 1 的五次多项式 $f(x)$ 满足: $f(n)=8n, n=1,2,\cdots,5$, 则 $f(x)$ 的一次项系数为______.

证明. 1. Lagrange 插值法 (注意是对 $f(x)-8x$ 使用, 因为我们只有 5 个点, $\deg f(x)=5$);
2. $f(x)-8x=(x-1)(x-2)\cdots(x-5)$, 故 $a_1=8+5!(1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{5!})$. □

17 不等式

17.1 填空题

1. (11 一试) 设 a,b 为正实数, 且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq 2\sqrt{2}, (a-b)^2=4(ab)^3$. 则 $\log_a b=$______.

证明. $a+b\leq 2\sqrt{2}ab\Rightarrow (a+b)^2\leq 8a^2b^2$, $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab=4ab(a^2b^2+1)\geq 8a^2b^2$. 所以有 $(a+b)^2=8a^2b^2$, 等号成立条件为 $ab=1$, 故 $\log_a b=-1$. □

2. (12 一试) 设 $x,y,z\in[0,1]$, 则 $M=\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|}+\sqrt{|z-x|}$ 的最大值为______.

证明. 柯西后化为二元函数. 更一般的想法: $f(x,y,z) \Rightarrow g(x,y)|_{h(x,y,z)} \Rightarrow (x,y) \Rightarrow z$. 过程为通过不等式化为二元函数, 得到取等条件为 $h(x,y,z)$, 再由二元函数取得最值时的 (x,y) 反解出 z, 从而取到最值. □

17.2 简答题

1. LEFT 称一个复数数列 $\{z_n\}$ 为" 有趣的", 若 $|z_1|=1$, 且对任意正整数 n, 均有 $4z_{n+1}^2+2z_nz_{n+1}+z_n^2=0$. 求最大的常数 C, 使得对一切有趣的数列 $\{z_n\}$ 及任意正整数 m , 均有 $|z_1+z_2+\cdots+z_m| \geq C$.

17.3 柯西不等式等

1. (22 一试 B1) 对任意三个两两不同的非负实数 a,b,c, 定义

$$S(a,b,c)=\frac{3b+4c}{|a-b|}+\frac{3c+4a}{|b-c|}+\frac{3a+4b}{|c-a|}$$

并设 $S(a,b,c)$ 能取到的最小值为 m_0.

(1) 求证: 当 a,b,c 均为正数时, $S(a,b,c)>m_0$;

(2) 求所有非负实数组 (x,y,z), 使得 $S(x,y,z)=m_0$.

证明. (1) 检验 $S(a,b,c)<S(a,b,0)$.

(2) 由 (1) 的结论可得如果 $S(a,b,c)=m_0$, 则 a,b,c 中恰有一项为 0, 不妨设 $a>b>c=0$, 考虑 $S(a,b,0)=\frac{3b}{a-b}+\frac{4a}{b}+\frac{3a+4b}{a}$, 看着就想用基本不等式, 但注意我们会用两次基本不等式才能消掉所有变量, 这涉及到两次基本不等式取等条件一致才能得到最小值, 故考虑

$$\frac{3b}{a-b}+\frac{m(a-b)+(4-m)a}{b}+m+\frac{4b}{a}+3$$

计算两个取等条件相等时 $m=3$, 最后最小值等于 16, 取等条件为 $(2b,b,0)$, 三个位置轮换.

□

2. (上中 1 练习 2)**调整系数** 设 a,b,c,d 均为正实数, 且满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. 证明:

$$a+b+c+d+\frac{1}{abcd}\geqslant 18$$

证明. $1=a^2+b^2+c^2+d^2\geq 4\sqrt[2]{abcd}$, 故 $\frac{1}{abcd}\geq 16$. 考虑

$$a+b+c+d+m\frac{1}{abcd}+(1-m)\frac{1}{abcd}\geq a+b+c+d+m\frac{1}{abcd}+(1-m)16\geq 18$$

对前部分使用均值不等式, 计算相应的 m. □

3. (上中 1 练习 2)**调整系数** 设 $x\in\left[\frac{3}{2},5\right]$. 证明:

$$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}.$$

证明. 如果直接来:

$$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}\leq\sqrt{(x+1+2x-3+15-3x)(4+1+1)}=\sqrt{78}>\sqrt{76}$$

与要求的有差距, 所以想到调整系数与根号内的情况得到更好的界 □

4. 常用推论 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是实数且 $b_i>0$, 则

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geqslant\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

证明. $(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n})(b_1+\cdots b_n)\geq(\sum\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}\sqrt{b_i})^2$, 等号成立当且仅当 $\frac{a_i}{b_i}=\frac{a_j}{b_j}$ □

5. (上中 1 练习 2)直接推论 设 $a_i>0,i=1,2,\cdots,n,\sum_{i=1}^n a_i=1$. 证明:

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2n`'}$$

6. (上中 1 练习 2) 设 a,b,c 为正实数. 证明:

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\leqslant\frac{a+b+c}{4}.$$

证明. 注意到不妨设 $a+b+c=1$, $ab\le\frac{(a+b)^2}{4}$, 随后直接柯西. □

7. (上中 1 练习 2) 证明: 对任意正整数 n, 均有

(1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$;

(2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$.

证明. (1) 演示: $\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n\cdot 1}\le\frac{\sum(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}$, 注意到等号成立条件为 $1+\frac{1}{n}=1$ 不可能成立, 所以是严格小于 $1+\frac{1}{n+1}$.

(2) 给学生练习: $\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n+1})^n\cdot(1+\frac{1}{n+1})^2}$, 直接比较即可, 需要一定量计算.

□

8. (上中 1 练习 2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正实数且满足 $x_1x_2\cdots x_n=1$. 证明:

$$x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}\geqslant\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}$$

9. (20B 一试) 设正实数 a,b,c 满足 $a^2+4b^2+9c^2=4b+12c-2$, 求 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$ 的最小值.

证明. 分析: 不相关的三个分母, 想消掉分母就需要各消各的, 于是想到柯西不等式 $(da+eb+fc)(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c})\ge(\sqrt{d}+\sqrt{2e}+\sqrt{3f})^2$. 问题化为找 a,b,c 的线性关系, 题目给的是二次关系, 柯西不等式把平方和转化为和的平方, 也就是二次化为了一次: $a^2+(2b-1)^2+(3c-2)^2=3$,

$$9=3[a^2+(2b-1)^2+(3c-2)^2=3]\ge(a+2b-1+3c-2)^2$$

故 $a+2b+3c\le 6$, 等号成立当且仅当 $a=b=c=1$. 回代, 得

$$(a+2b+3c)(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c})\ge(1+2+3)^2=6^2$$

故 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\ge 6$ 等号成立当且仅当 $a=b=c=1$, 故最小值为 6. □

18 一些证明

1. 证明: 所有无限不循环小数是无理数 (hint: 证明所有有理数是无限循环小数).

2. (22A1 一试) 设正整数数列 $\{a_n\}$ 同时具有以下两个性质:

   (i) 对任意正整数 k, 均有 $a_{2k-1}+a_{2k}=2^k$;

   (ii) 对任意正整数 m, 均存在正整数 $l\le m$, 使得 $a_{m+1}=\sum_{i=l}^{m}a_i$. 求 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2022}$ 的最大值 (也可求最小值, 更为容易些).

   证明. **套路:** 找特殊情况计算出" 极值", 构造出特殊情况, 说明为什么是极值, 两个过程的顺序可能调整.

   $a_{m+1}=\sum_{i=l}^{m}a_i\Rightarrow a_{m+1}\ge a_m$, 单调递增, 所以有 $a_{2n-1}\le 2^{n-1}$, $a_{2n}\ge 2^{n-1}$, 又因为 $a_{2n-3}+a_{2n-2}=2^{k-1}\ge a_{2n-1}$, 所以

   $$a_{2n-3}+a_{2n-2}=2^{n-1}=a_{2n-1}\text{ 或 }a_{2n-2}=a_{2n-1}$$

   第一种情况对应了 $\sum a_{2n}$ 的最小值, 这较容易看出. 实际上第二种情况对应了 $\sum a_{2n}$ 的最大值, 我们来证明这一点:

   $$a_2+(a_4+a_6)+\cdots\le a_2+(a_5+a_6)+(a_9+a_{10})+\cdots$$

   这个求和是很好计算的, 即为 $1+2^3+2^5+\cdots+2^{1011}$, 我们再构造这样的数列可以出现:

   $$1\ 1\ 1\ 3\ 3\ 5\ 5\ 11\ 11\ 21\cdots$$

   猜测 $a_{2n}=2a_{2n-1}+(-1)^n$, 再由 $a_{2n-1}+a_{2n}=2^n$, 得 $a_{2n-1}=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$, 检查 $a_{2n+1}=2^n-a_{2n-1}$ 也是这个规则即可, 我们也就得到了存在性. □