给高中生的法式大题

孙沄滮 也许以后还有其他人

出版社暂无

出版年份待定

前言

这本书简单来说是我对高中数学知识, 教学的思考与探索, 希望将我对数学的理解与分析尽可能的传达给学生, 题目或是完全自编, 或是将已有的素材改编, 不束缚于高考压轴题严格由三小问构成, 本书每一小节的问题多为十数问, 甚至还有开放性问题. 为什么要设计得如此特殊呢? 本书的动机与使用方法是怎样的呢? 这就是本篇前言所要回答的问题.

出于考试的规范性, 试卷的题量, 题型必然是确定的, 但数学的学习并不是固定的, 好的问题我们自然要深挖其中精神, 例如要把一个函数研究清楚, 那么其单调性, 单调区间, 周期性, 对称性, 最值, 极值等等基本性质都需要打破砂锅问到底, 三小问是远远不够的. 本书并不是考试卷, 所以我们不妨自由一些. 关注一个好的问题, 我会建立简单的研究主线, 随后尽力将得到的结果推广, 如在 $[m, n]$ 上成立的性质是否能推广到在 $\mathbf{R}$ 上成立? 如果不能的话, 可否对函数再添加一些条件使得该性质在 $\mathbf{R}$ 上成立? 诸如此类有众多小问的问题必然可以锻炼学生深度思考的能力, 但学生能否从头坚持到尾是老师在题目设计上要重点考虑的问题, 为此, 本书每一小问的难度都有严格把控, 不会太难, 也不会太过简单, 为了规避同学们因被第一题卡住而不能往下继续, 所以每一小节的第一问都会附上提示, 同时部分较难的习题也附有提示, 整体深入浅出, 力求让不同程度的同学都能参与其中, 体会思考的乐趣.

本书的动机与使用方法是怎样的呢? 高中时间宝贵, 教师应指引学生更好地理解数学知识的精髓, 于是我带着这个想法编写本书, 本书虽仍以题目为主体, 但更多的是围绕一个问题开展一场无人教学, 将我对于每个大问题的思考与想法化作一个个小问题来引导学生思考从而达到教学目的. 本书的使用方法是每周一个小节作为周末回家作业, 为此应按照正常教学速度设计每个小节, 但因为编写时间有限, 同时我尚未参加实地教学, 只能先贡献零星内容聊表本书的风格与精神.

我希望大家能称本书为一本”数学”书, 这不是因为内容都是数学, 而是因为本书是真真切切以带领学生理解数学为目标, 而非一心为了应试做题, 理解数学才是最终目的, 应试是其附带品, 两者并不矛盾, 是包含关系. 本书每个小问的设置都可以说颇具”数学味道”.

满纸荒唐言, 一把辛酸泪.

都云作者痴, 谁解其中味?

书中的一切都是数学的, 我为此感到深深自豪.

感谢中国科学院数学与系统科学研究院陈国瑞的帮助, 陈国瑞对于题目设计提出了许多宝贵意见, 本书的完成离不开他的帮助.

孙沄滮

2024 年 10 月 21 日于家中

目录

第一章　函数

在这一章中, 我们将细致地讨论函数的各种问题.

1.1　整体与局部

在学习单调性时, 我们知道单调性是一个整体性质, 如单调递增是对任意 x_1, x_2 属于定义域 D, 只要 $x_1 \geq x_2$ 都有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 这在整个定义域上都成立, 所以称单调性为整体性质. 但让一个函数是单调的实在有些苛刻, 比如重要的 $\sin x$ 等三角函数都不是单调的, 于是我们有了单调区间的说法, 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上 $\sin x$ 是单调递增的, 整体虽然不单调, 但放到局部上就单调了. 整体因为过于宽广而难以掌握, 但局部相对狭小更容易研究, 同时整体就是由许多局部拼凑而成, 当我们掌握了所有局部, 也就可以拼凑出整体, 所以将整体拆分成局部的想法是自然且可靠的.

本节的主题就是体会函数整体与局部的联系, **局部的性质是否一定能上升到整体呢?**

前置知识: 单调性, $x + \dfrac{1}{x}$ 型函数.

关键词: 整体, 局部, 集合划分.

问题 1.1.1. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, $f(x)$ 单调递增是否等价于对任意整数 n, $f(x)$ 在 $[n, n+1)$ 上单调递增?(可以画图作答)

提示: 考虑周期为 1 的函数 $f(x)$, $f(x) = x$, 当 $x \in [0, 1)$ 时.

问题 1.1.2. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, $f(x)$ 单调递增是对任意整数 n, $f(x)$ 在 $[n, n+1)$ 上单调递增的什么条件?

证明. 充分不必要. □

问题 1.1.3. 请再找出一个性质 P, 使得对任意整数 n, 即使 $f(x)$ 在 $[n, n+1)$ 上有性质 P, 但在 $\mathbf{R}$ 上, $f(x)$ 仍可能没有性质 P.(答案不唯一)

证明. 如 $f(x)$ 在 $[n, n+1)$ 单调递减, $f(x)$ 在 $[n, n+1)$ 为常数. □

问题 1.1.4. 请添加一个条件使得 $f(x)$ 单调递增与对任意整数 n, $f(x)$ 在 $[n, n+1)$ 上单调递增互为充要条件.(答案不唯一)

证明. 如 $f(x)$ 连续; 将 $[n, n+1)$ 换成 $[n, n+1]$ 等. □

问题 1.1.5. 如果将上题的 $[n, n+1)$ 改为 $[n, n+1]$, $f(x)$ 单调递增与对任意整数 n, $f(x)$ 在 $[n, n+1]$ 上单调递增是什么关系呢?

证明. 充要. □

问题 1.1.6. 证明 $\cup_{n\in\mathbf{Z}}[n, n+1) = \cup_{n\in\mathbf{Z}}[n, n+1] = \mathbf{R}$

问题 1.1.7. 既然 $\cup_{n\in\mathbf{Z}}[n, n+1) = \cup_{n\in\mathbf{Z}}[n, n+1] = \mathbf{R}$, 两者都得到了整个定义域, 那在问题 1.1.5 中产生不一样结果的原因是什么呢?

证明. $[n,n+1)\cap[m,m+1)=\varnothing,\forall m\neq n,m\in\mathbf{N}$, $[n,n+1]\cap[n+1,n+2]=\{n+1\}$. □

定义 1.1.1 (集合的划分). 对集合 A, 如果 $A=\cup A_i,i\in S$, 且 $A_i\cap A_j=\varnothing$, 则称 $\{A_i\mid i\in S\}$ 是集合 A 的一个**划分**. 我们也将两两无交的并称为**无交并**, 用 $A=\bigsqcup\limits_{i\in S}A_i$ 表示.

问题 1.1.8. 证明 $\{[n,n+1)\mid n\in\mathbf{Z}\}$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个划分, 但 $\{[n,n+1]\mid n\in\mathbf{Z}\}$ 不是.

如果 $\{A_i\mid i\in S\}$ 是 A 的划分, 因为 $A_i\cap A_j=\varnothing$, 所以每个部分是没有关系的, 故定义在 A_i 与 A_j 上的函数自然没有任何关系, 这也自然引起了上述问题 $1-5$.

问题 1.1.9. 请结合这一系列思考, 回味你在问题 1.1.4 中给出的答案, 若当时没有想出答案的话, 请给出一个与" 将每个 $[n,n+1)$ 替换为 $[n,n+1]$" 不同的答案.

问题 1.1.10. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+1)=af(x),a$ 是不为 0 的实常数. 若当 $0<x\leq1$ 时, $f(x)=3^x+3^{-x}$, 试研究函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是否可能是单调函数? 若可能, 求出 a 的取值范围; 若不可能, 请说明理由.

1.2 连续性基础 I

实际上, 在高中范畴中, 除了一些刻意分段的函数, 我们遇到的都是连续函数, 如多项式函数 (x^2+bx+c), 幂指对函数, 三角函数 $\sin x$(注意 $\tan x$ 在 $\frac{\pi}{2}+n\pi$ 处间断). 教科书中并没有给出连续的数学定义而是让大家在图像上直观感受, **一条没有断点的曲线**, 在本小节, 我并不给出连续的数学定义, 但想在此处提醒大家, 数学是严格的符号语言, 一切概念都应有严格的数学定义, 直观感受并不是严格定义, 采取直观理解的方式是因为数学上的定义对高中的我们来说难度较大, 所以略过了.

前置知识: 连续性, 介值性.

关键词: 连续性, 介值性, 新定义.

我们对连续性能说些什么呢? 在高考的角度, 一言以蔽之, **连续性** = **介值性**, 这是**唯一**的考点, 我们下面的题目也基本都可以通过介值性解决.

性质 1.2.1 (介值性)**.** *如果 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 那么任取 $f(a), f(b)$ 之间的数 m, 存在 $c \in [a,b]$ 使得 $f(c) = m$.*

定理 1.2.1 (零点定理)**.** *如果 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 同时 $f(a)f(b) < 0$, 那么存在 $c \in [a,b]$ 使得 $f(c) = 0$.*

我们接下来的问题都按如下函数展开: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 存在常数 $T > 0$, 使得对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(Tx) = f(x) + T$, 且 $y = f(x)$ 的图像是一条连续不断的曲线.

问题 1.2.1. 0 可以在 $f(x)$ 的定义域里吗?

问题 1.2.2. 证明任取 $M \in \mathbf{R}$, 存在 $m \in \mathbf{R}$ 使得 $f(m) > M$.

问题 1.2.3 (强化问题 1.2.1)**.** 证明任取 $M \in \mathbf{R}$, 存在 $m \in \mathbf{R}$ 使得 $f(m) = M$.
提示: 对任意 $x > 0$, 存在 $n \in \mathbf{Z}$ 使得 $nT + f(x) \leq M \leq (n+1)T + f(x)$.

问题 1.2.4. 证明 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$.

让我们保持 $f(Tx) = f(x) + T$ 与 $f(x)$ 连续, 但改变 $f(x)$ 的定义域:

问题 1.2.5. 如果 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$, 那么 $f(x)$ 的值域还一定是 $\mathbf{R}$ 吗? (无需严格证明, 指出 $f(x)$ 可能出现的问题即可)

问题 1.2.6. 更一般的, 任取 $m>0$, 如果 $f(x)$ 的定义域为 $(0,m)$, 那么 $f(x)$ 的值域一定是 $\mathbf{R}$ 吗?(无需严格证明, 指出 $f(x)$ 可能出现的问题即可)

注记 1.2.1. *有限长度的定义域会为函数带来一定有限性.*

我们来稍改下 $f(x)$ 的条件, 并把前面的问题都平移 (对称) 过来:

问题 1.2.7. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 存在常数 $T\in\mathbf{R}$, 使得对任意的 $x\in\mathbf{R}$, 都有 $f(x+T)=f(x)+T$, 且 $y=f(x)$ 的图像是一条连续不断的曲线, 证明任取 $M\in\mathbf{R}$, 存在 $m\in\mathbf{R}$ 使得 $f(m)>M$.

问题 1.2.8. 对上题的 $f(x)$, 证明任取 $M\in\mathbf{R}$, 存在 $m\in\mathbf{R}$ 使得 $f(m)=M$.

问题 1.2.9. 对上题的 $f(x)$, 证明 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$.

问题 1.2.10. 思考对于两种 $f(x)$, 我们的证明实际上并没有本质区别.

问题 1.2.11. 观察两个 $f(x)$ 性质的区别并思考为什么将两者的定义域设置的不相同.

下面是对问题 1.2.10 更深入的思考

$h(x)$ **语言:** 我们可以做的更抽象一些, 令 $f(x)$ 的定义域为 D, 另一函数 $h(x)$ 的定义域与值域均为 D, 存在常数 $T > 0$, 满足 $f(h(x)) = f(x) + T$, $\forall x \in D$.

问题 1.2.12. 验证 $h^n(x) \in D$, $\forall x \in D$, $n \in \mathbf{N}$.

问题 1.2.13. 证明任取 $M \in \mathbf{R}$, 存在 $m \in D$ 使得 $f(m) > M$.

提示: $f(h^2x) = f(h(x)) + T = f(x) + 2T$, $f(h^n(x)) = ?$

问题 1.2.14. 验证对于前文的两个 $f(x)$, 对应的 $h(x)$ 分别为 $h(x) = Tx$, $h(x) = x + T$.

问题 1.2.15. 体会问题 1.2.13 给出了问题 1.2.2, 问题 1.2.7 两个明明不同的问题一个统一的证明!

注记 1.2.2. *这是令人兴奋的发现, 两种 $f(x)$ 的性质明明不同, 但在更抽象的 $h(x)$ 语言下居然被统一了, 这也是我让大家思考对于两种 $f(x)$ 的证明思路实际上没有本质区别的原因.*

注记 1.2.3. 实际上并不需要 $h(x)$ 的值域恰好是 D, 只要包含于 D 就足够了, 因为我们只需要 $h^n(x) \in D, \forall n \in \mathbf{N}, x \in D$.

当然, 我们还可以在增加条件, 使得 $f(x)$ 的值域再次等于 $\mathbf{R}$, 我希望同学们能尝试给出.

问题 1.2.16. 尝试给出条件, 使得 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$.

1.3 连续性进阶

这一小节, 我们的目标是介绍连续性的高端性质, 同时**见识**一下建平中学 25 届高三数学第一次月考的压轴题, 此题难度过大, 远超高中要求, 我们将给出两种做法. 第一种, 依靠一定大学数学中连续函数的特殊性质, 我们将给出这些性质, 并简述如何理解, 接受这些性质, 其中证明远超高中要求, 有兴趣的同学可自行搜索相关知识, 可参考**中科大少年班数分讲义第二章**的相关知识, **这也是我非常想在二附中开设拓展课讲授的内容**, 不仅对高考的导数知识大有裨益, 对学生培优教学也会非常有帮助; 第二种, 完全使用高中知识, 过程非常复杂.

本节重在欣赏数学, 陶冶情操, 高中范畴内困难的题目, 在大学视角下变得简单, 自然, 自然的数学就是美的数学.

首先, 我提纲挈领地总结连续性的一些性质, 更具体的表述会在后文给出.

性质 1.3.1. *固定 x_2, 如果当 $|x_1 - x_2|$ 非常小时, $|f(x_1) - f(x_2)|$ 也非常小, 那么 $f(x)$ 在 x_2 连续.*

注记 1.3.1. *最简单的例子就是 $f(x) = x$. 但请同学们注意到, 我在上一条说的" 非常小" 并不是数学语言, 这并不数学, 关于连续性有更加美丽与精准的 $\varepsilon - \delta$ 语言定义可参考***中科大少年班数分讲义第二章第一节***, 当然, 非常欢迎同学们独立思考给出自己心目中函数***连续***的定义,* **我在高中时自己独立给出了正确的定义***, 但当时我并不知道这是一项不平凡的工作, 希望同学们有机会完成这项不平凡的工作.*

性质 1.3.2. *如果定义域为 $\mathbf{R}$ 的连续函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的取值已经确定, 那么 $f(x)$ 在无理数上的取值也随之确定. 即连续函数在 $\mathbf{Q}$ 上的情况决定了其在整个 $\mathbf{R}$ 上的情况.*

注记 1.3.2. *回顾指数函数 $f(x) = 2^x$ 在 $x = \sqrt{2}$ 时如何定义, 我们考虑有理数数列 x_n, 随着 n 增大, x_n 趋近 $\sqrt{2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{2}$. 我们令 $2^{\sqrt{2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^{x_n}$ (因为 $x_n \in \mathbf{Q}$, 所以每个 2^{x_n} 都是确定的). 注意到我们熟知的指数函数是连续的.*

性质 1.3.2 看上去还是有些模糊, 我们给出一个例子:

例子 1.3.1. 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数, 如果 $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{Q}$, 那么 $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

证明. 考虑 $g(x) = x, \forall x \in \mathbf{R}$, , 因为 $f(x), g(x)$ 均连续且 $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbf{Q}$, 故 $f(x) = g(x) = x, \forall x \in \mathbf{R}$. 连续函数在有理数上的性态确定了其在整个实数域上的性态. □

问题 1.3.2. 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数, 如果 $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbf{Q}$, 那么 $f(\sqrt{2}) =$ ______.

我们直接给出建平的原题, 感兴趣的同学可以直接尝试.

已知 $\mathbf{R}$ 的子集 S 和定义域同为 D 的函数 $f(x), g(x)$. 若对任意 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 - x_2 \in S$ 时, 总有 $f(x_1) - g(x_2) \in S$, 则称 $y = f(x)$ 是 $y = g(x)$ 的一个" S 关联函数".

问题 1.3.3. 对定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $p(x)$, 证明: " $p(x) = x + p(0)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 成立" 的充分必要条件是" 存在函数 $q(x)$, 使得对任意正整数 $n, q(x)$ 都是 $p(x)$ 的一个 $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ 关联函数".

必要性是显然的, 我们只考虑充分性的证明

下面是关于**法一**的引导: 前两个问题超出高中要求, 我虽然给出了提示, 但同学们可以承认两个问题的结论去思考剩余的问题.

问题 1.3.4. 证明 $p(x), q(x)$ 为连续函数.

提示: 三角不等式.

问题 1.3.5. 证明 $p(x) = q(x)$.

提示: 固定 $x_1 \in \mathbf{R}$, 任取 $n \in \mathbf{N}$, 如果 $|x_2 - x_1| \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, 那么 $|q(x_1) - p(x_2)| < \frac{1}{n}$, 故 $\lim\limits_{x_2 \to x_1} q(x_1) = p(x_2)$, 由连续性得 $q(x_2) = p(x_2)$, 再由 x_2 的任意性, 得 $p(x) = q(x)$.

注记 1.3.3. 现在我们有当 $\frac{1}{n+1} \leq x_1 - x_2 \leq \frac{1}{n}$ 时, $\frac{1}{n+1} \leq p(x_1) - p(x_2) \leq \frac{1}{n}$.

问题 1.3.6. 证明 $p(x + \frac{1}{n}) = p(x) + \frac{1}{n}, \forall x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}$.

问题 1.3.7. 证明 $p(x + m) = p(x) + m, \forall x \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Q}$.

问题 1.3.8. 证明 $p(m) = p(0) + m, \forall x \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Q}$.

问题 1.3.9. 证明 $p(x) = p(0) + x, \forall x \in \mathbf{R}$.

现在来看看完全在高中范围内的**法二**:

问题 1.3.10. 任取 $n \in \mathbf{N}$, 证明 $q(x + \frac{1}{n}) - p(x) = \frac{1}{n+1}$.

提示: 注意到 $\frac{1}{n+1} \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, 且 $\frac{1}{n+1} \in [\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}]$.

问题 1.3.11. 证明 $p(x) = q(x)$, 于是有 $p(x + \frac{1}{n}) = p(x) + \frac{1}{n}$.

问题 1.3.12. 证明 $p(x)$ 单调递增.

问题 1.3.13. 证明 $p(x) = p(0) + x, \forall x \in \mathbf{R}$.

提示: 反证法.

1.4 新定义 I

在这一系列小节中, 我们将细致地介绍函数的各种”新定义”问题, 同学们不必对于新定义忐忑, 实际上这都是给函数加上了新的”性质”, 让你考虑的函数变得特殊, 和我们掌握的单调性, 周期性一样, 研究对象是带有特殊性质的函数而已, 万变不离其宗.

本节按照如下新定义展开: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $M \subseteq \mathbf{R}$. 若 $f(x)$ 满足对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 当 $x_1 - x_2 \in M$ 时, 都有 $f(x_1) - f(x_2) \in M$, 则称 $f(x)$ 是 M 连续的.

问题 1.4.1. 请写出一个函数 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 连续的, 并判断 $f(x)$ 是否是 $\{n\}$ 连续的 $(n \in \mathbf{N}^*)$, 说明理由;

问题 1.4.2. 如果 $f(x)$ 是 $[2,3]$ 连续的, 那么 $f(x)$ 是 $\{3\}$ 连续的.

提示 1: $6 = 2+2+2 = 3+3$.

提示 2: 根据 $[2,3]$ 连续的性质, 用两种方法计算 $f(x+6) - f(x)$ 的范围.

提示 3: $a - c = (a-b) + (b-c)$.

提示 4: $f(x+6) - f(x) = (f(x+6) - f(x+3)) + (f(x+3) - f(x)) \in [4,6]$; 这是通过 $6 = 3+3$ 得到, 请通过 $6 = 2+2+2$ 重复上述操作, 得到 $f(x+6) - f(x)$ 的范围, 并观察两种方式得到的范围, 找到破题关键.

问题 1.4.3. 如果 $f(x)$ 是 $[2,3]$ 连续的, 那么 $f(x)$ 是 $\{2\}$ 连续的.

问题 1.4.4. 当 $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 时, $f(x) = ax^3 + \frac{1}{2}bx + 1$, 其中 $a, b \in \mathbf{Z}$, 且 $f(x)$ 是$[2,3]$ 连续的, 求 a, b 的数量关系.

问题 1.4.5. 如果 $f(x)$ 是 $[2,3]$ 连续的, 那么 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 连续的, 并由此证明 $f(x)$ 单调递增.

问题 1.4.6. 如果 $f(x)$ 是 $[m, m+n]$ 连续的, 且 $f(x)$ 是 $\{m\}$ 连续的, 那么 $f(x)$ 是 $[0,n]$ 连续的, $n > 0$.

问题 1.4.7. 开放问题 强化你在问题 1.4.4 中给出的 a, b 关系, 即缩小 a, b 可能取值的范围.

第二章　数列

2.1　数列与函数

本小节介绍数列与函数的交叉关系, 实际上数列是特殊的函数 (定义域为 $\mathbf{N}$ 的函数), 所以我们自然可以用研究函数的方法研究数列. 如函数 $f(x)=x^2$, 数列 $a_n=n^2$, 当 $x>0, n\geq 1$ 时, 一个是单调递增函数, 一个是递增数列, 数列的递增其实可以从函数的递增看出来, 但数列 $\{a_n\}$ 递增, 我们仍可构造出函数 $f(x)$ 满足 $f(n)=a_n, \forall n\in\mathbf{N}$, 但 $f(x)$ 并不是单调递增的. 因为前 n 项和 S_n 也可以看作数列, 所以也是特殊函数.

问题 2.1.1. 构造单调数列 $\{a_n\}$, 与函数 $f(x)$ 满足 $f(n)=a_n, \forall n\in\mathbf{N}$, 但 $f(x)$ 并不是单调自增的.

回顾函数整体与局部 1.1 一节, 整体性质可以下降到局部, 但局部性质不一定能上升到整体.

前置知识: 数列基本性质, 函数基本性质.

关键词: 数列最值, 单调性, 数列的函数方法.

下面的问题互相并不相关, 请体会用函数的方法/性质研究数列:

问题 2.1.2. 使不等式 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}<a-2007\frac{1}{3}$ 对一切正整数 n 都成立的最小正整数 a 的值为______.

问题 2.1.3. 若数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的通项公式为

$$a_n=\frac{n^2+1000}{n}\ln\frac{n^2+n+1000}{n^2+1000},$$

则使得 a_n 取最小值的 $n=$______.

下面看一道一题多解, 法一为**纯粹数列方法**, 法二为**函数观点解决数论问题**.

已知无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 并且有 $6S_n = (a_n+1)(a_n+2)$, 若不等式 $a_2a_n < 0$ 对任意不等于 2 的正整数 n 恒成立, 则满足条件的数列有 ________ 个.

法一 标准 (常规) 方法:

问题 2.1.4. 计算 a_{n+1} 与 a_n 的关系

提示: 表示 a_{n+1}.

问题 2.1.5. 计算 a_1, a_2, a_3.

问题 2.1.6. 结合条件 $a_2a_n < 0$, 计算满足条件的数列有 ________ 个?

法二 函数方法:

问题 2.1.7. 用 S_3 表示 a_4, 并计算 a_4 的可能性 (这需要计算 a_1, a_2, a_3).

提示: $6S_4 = 6(S_3 + a_4) = a_4^2 + 3a_4 + 2$, 这是以 a_4 为未定元的一元二次方程, 满足 $a_2a_4 < 0$, a_4 有两个解还是一个解?

注记 2.1.1. 实际上我们可以递推地计算任意 a_n, 如 S_1 推出 a_2 后, 自然就有了 S_2, 再由 S_2 推出 a_3, 循环往复, 推出任意的 a_n.

问题 2.1.8. 用 S_n 表示 a_{n+1}.

猜测 2.1.1. 由 a_4 只有一个解, 猜测 $a_n, n \geq 4$ 均只有一个解.

问题 2.1.9. $a_n, n \geq 4$ 均只有一个解等价于什么?

提示: 计算 a_n 靠的是一元二次方程, 所以 a_n 只有一解等价于?

问题 2.1.10. 证明 $S_n > \frac{1}{3}, n \geq 4$, 并由此计算满足条件的数列有 ________ 个?

注记 2.1.2. 这个方法是我的第一反应, 利用一元二次方程有两个解, 如果一正一负那么一定只取正解. 为什么会这么想呢? 因为我注意到这是一个递推 *(recursive)* 数列, 我们可以递推地求出任意一项. 但这个方法给我一种"视野"狭小的感觉, 因为每次操作都是对着确定的一项, 法一则站得更高, 对任意项找出了通用规律.

第三章　补充材料

在这一章中, 我们将补充一些大家中小学学过, 但可能遗忘的内容, 如数论的简单基础.

3.1　数论基础

初等数论是整数的艺术, 我第一次体会到数学证明的严谨与奇妙便是高中时自学竞赛小蓝本的数论, 第一遍完成所有习题时仍觉得云里雾里, 理清其中复杂需要投入更多精力. 不过到了现代数学中的数论, 那恐怕讨论的也不再是整数了, 一切会变得愈发抽象与复杂. 数论是当今数学研究毫无疑问的重点方向, 诞生了多名菲尔兹奖, 仅从 2002 年开始就有 Laurent Lafforgue(2002), Vladimir Voevodsky(2002), 陶哲轩 (2006), Ngo Bao Chau(2010), Manjul Bhargava(2014), Peter Scholze(2018), James Maynard(2022) 相继因其在数论上的突破性工作获得菲尔兹奖. 中国数学家在现代数论上也有相当突出的贡献, 如中国科学院的田野院士对 BSD 猜想的一系列突破, 普林斯顿大学的张寿武教授证明 Bogomolov 猜想, 张寿武教授的学生张伟, 同为北大黄金一代的恽之玮现在都在麻省理工学院担任教授, 两人对数论的发展起到了推进作用, 也一度是菲尔兹奖的有力竞争者.

如果你对数学研究有强烈的追求, 那么进入大学后学习, 研究数论 (算术几何) 是非常好的选择! 中科院数学所和北京大学是中国数论的绝对中心!

定义 3.1.1. **素数** *(或质数) 是恰好有两个正因数 (即 1 和它本身) 的自然数, 如* $3, 7, 683$.

定理 3.1.1 (算术基本定理)**.** *又称为正整数的唯一分解定理, 即: 每个大于 1 的自然数, 要么本身就是质数, 要么可以写为 2 个或以上的质数的积, 而且这些质因子按大小排列之后, 写法仅有一种方式. 如* $6936 = 2^3 \cdot 3 \cdot 17^2$*. 更抽象的表达为对任意自然数* n *有* $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m}$*, 其中* p_i *为互异素数,* $n_i \in \mathbf{N}$.

注记 3.1.1. *任意自然数是由素数搭建而成, 素数是自然数的"局部", 当我们研究清楚了所有素数, 一定程度上可以相信我们掌握了自然数.*

定义 3.1.2. a, b 均为整数, 称 a **整除**b, 如果存在整数 m 使得 $b = ma$, 记为 $a \mid b$, 称 a 为 b 的**因数**. 再来一个整数 c, 记 $\gcd(b,c)$ 为 b, c 公共因数的最大值, 所以也称为**最大公因数**, 如 $\gcd(150,100) = 50$.

性质 3.1.1. m, n 为整数, 如果 $\gcd(m,n) = d$, 那么存在整数 u, v 使得 $um + vn = d$, 且 u, v 是唯一的. 如 $\gcd(3,5) = 1 = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5$.

性质 3.1.2 (带余除法)**.** 任取整数 a, b, 存在整数 k 和 c, 其中 $0 \le c < b$ 使得 $b = ka + c$, 如 $12 = 2 \cdot 5 + 2$, $-23 = (-5) \cdot 5 + 2$.

注记 3.1.2. *我们总做到一些分类讨论问题, 如分为 $n = 3k, n = 3k+1, 3k+2$, 实际上是因为除 3 的余数只有 0, 1, 2 三种情况, 这也是带余除法告诉我们的.*

能用上的性质就这些, 大家在平时做题时看到**整数**两个字就要警觉, 很有可能用到素数整除相关的性质. 我们先给出一些互相没有关联的题目:

问题 3.1.1. 已知四个整数 a, b, c, d 满足 $0 < a < b < c < d$, 若 a, b, c 成等差数列, b, c, d 成等比数列, 且 $d - a = 48$, 则 $a + b + c + d$ 的值为______.

问题 3.1.2. 已知 m, a, b, c 为正整数, 且 $a \log_m 2 + b \log_m 3 + c \log_m 5 = 2024$, 则 $m + a + b + c$ 的最小值是______.

问题 3.1.3. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数, 首项 $a_1 = 2019$, 且对任意正整数 n, 总存在正整数 m, 使得 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_m$. 则这样的数列 $\{a_n\}$ 的个数为 ______.

提示: $2019 = 3 \cdot 683$.

问题 3.1.4. 已知首项为 2 , 公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意的不相等的两个正整数 i, j, 都存在正整数 k, 使得 $a_i + a_j = a_k$ 成立, 则公差 d 的取值构成的集合是 ______.

问题 3.1.5. 将正整数 n 分解为两个正整数 k_1, k_2 的积, 即 $n = k_1 \cdot k_2$, 当 k_1, k_2 两数差的绝对值最小时, 我们称其为最优分解. 如 $20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5$, 其中 4×5 即为 20 的最优分解, 当 k_1, k_2 是 n 的最优分解时, 定义 $f(n) = |k_1 - k_2|$, 则数列 $\{f(5^n)\}$ 的前 2023 项的和______.

互相没关联的题目给完了, 现在我们讨论一道并不长的题目:

定义 $\mathbf{N}_+$ 上的函数: $\sigma(n) = d_1 + d_2 + \cdots + d_s$, 其中 $d_1, d_2, \cdots, d_s$ 为 n 的所有正因数. 若 $\sigma(n) = 2n$, 则称正整数 n 为完美数. 例如 $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \times 6$, 因此 6 是一个完美数; 再如 $\sigma(9) = 1 + 3 + 9 = 13 \neq 2 \times 9$, 因此 9 不是完美数.

问题 3.1.6. 证明 p 是素数 $\iff \sigma(p) = p + 1$.

问题 3.1.7. 计算 $\sigma(p^n)$, 其中 p 为素数.

问题 3.1.8. 判断 $\sigma(23), \sigma(88), \sigma(2024)$ 满足的数量关系, 并说明理由;

问题 3.1.9. 如果 $\gcd(m, n) = 1$, 证明 $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$;

问题 3.1.10. 已知 $n = p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$, 其中 p_i 为互异素数, $n_i \in \mathbf{N}$, 证明 $\sigma(n) = \sigma(p_1^{n_1}) \cdots \sigma(p_m^{n_m})$.

注记 3.1.3. 上述问题表示我们已经可以计算任意自然数 n 对应的 $\sigma(n)$.

问题 3.1.11. 已知 $2^k - 1$ 为素数, 求证: $2^{k-1}\left(2^k - 1\right)$ 是完美数;

问题 3.1.12. 是否存在完美数 q, 其可表示为某个正整数的平方? 若存在, 求出 q 所有可能值; 若不存在, 请说明理由.

圆 C: $(x-2)^2+(y-3)^2=9$, 点 D 在 C 上运动, 点 $B(3,2)$, 记 M 为过 B,D 两点的弦的重点, 求 M 的**轨迹方程**.

我的第一反应与你一样:

步骤 1: 设点 $M(x,y)$, $l_{BD}\colon y-2=k(x-3)$.

步骤 2: 直线方程与圆相交 : $l_{BD}\cap C\Rightarrow x_1,x_2$, $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, y 也一样. 问题在于计算过于复杂, 同时我们得到 M 的坐标形式为 $(f(k),g(k))$, 这是因为 x_i 都是用 k 来表示的. 要求**轨迹方程**, 实际是求 M 点横坐标 x 与纵坐标 y 之间的**关系**, 即两者满足的**方程**, 自然是不需要多出来参数 k, 我们需要的是例如 $x^2+y^2=1, y=x+2$ 这样的方程. 我在后面会指出什么问题需要设出参数 k.

那如何找到**关系/方程**呢? 其实你也发现了, **向量关系给出方程**, $\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{BD}$, 但是 D 是个动点, 这又需要引入新的未知数来表示 D 的坐标, 这并不好 (**找关系要简单, 未知数多了我们处理不了, 无法全部约去**), 注意到实际上有 $\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{BM}$, 问题一下就解决了

$$(x-2,y-3)\cdot(x-3,y-2)=0.$$

注记 3.1.4. *首先步骤 1 先设点 $M(x,y)$ 坐标是对的, 步骤 2 我们聚焦于找 x,y 的关系, 函数关系从几何来读, 不要过于代数.*

什么时候需要代数, 或者说需要引入斜率参数 k 呢? 往往是处理计算数值问题我们需要 k, 比如告诉你**无论斜率怎么变, A 是定值**, 或让你计算 A 的**最值**, 第一个问题是你用 k 表示出来 A 后发现 k 被约去了, 第二个问题会转化成 k 的函数的最值问题.

注意到垂直条件后, 找关系/轨迹方程, 用向量点乘为 0; 计算最值可以考虑设出斜率 k.